Treball de recerca

Estudi de la quarta dimensió

3a Edició Premi Poincaré 2006

Premi Poincaré 2006

Estudi de la quarta dimensió

Autor: Jordi Prat Camps
Centre: IES Lluís de Peguera (Manresa)
Tutor: Sr. Albert Armenteres Capdevila,

pel domini dels processos d'abstracció en l'anàlisi de fenòmens geomètrics de dimensió superior a 3 a partir de la comprensió de fenòmens anàlegs en dimensions inferiors, pel nivell d'autoexigència en tots els aspectes rellevants de la memòria, com ara el rigor en els càlculs matemàtics, la abundància i qualitat dels materials gràfics, les referències exhaustives, o l'acurada redacció.

Entendre aquelles coses que estan davant la nostra porta és la millor preparació per entendre aquelles que estan just per sobre.

Hypatia (370-415)

0.1. Tema escollit i factors que han motivat la seva elecció

El present treball, tal com el seu títol indica, consisteix en un estudi de la quarta dimensió. El concepte de dimensions superiors resulta ésser notòriament complex de comprendre, motiu pel qual dedico íntegrament el primer capítol del treball a explicar-lo àmpliament.

Pel que fa als factors que han motivat l'elecció del tema, aquests són diversos i alguns d'ells poc concrets. En primer lloc cal apuntar la curiositat que em despertà la possibilitat d'estudiar una cosa tan abstracta com una dimensió diferent a les 3 que ja coneixem. Em va semblar un tema poc explorat en els treballs de recerca fets fins ara i que mereixia un estudi, encara que no pogués ser massa profund. El meu interès també es va incrementar de manera substancial en llegir un dels llibres que han resultat ser de major importància a l'hora de crear el treball i que és *Planilàndia*. La gran quantitat d'idees que em va proporcionar em va fer decidir definitivament pel tema de la quarta dimensió.

0.2. Objectius perseguits pel treball

El tema de la quarta dimensió és extremadament ampli i pot ser tractat des de diferents perspectives. Podem resumir en una sèrie de punts els objectius que perseguim amb la realització d'aquest treball:

→ Introduir el concepte de dimensió i estudiar què significa parlar de "dimensions superiors".

→ Estudiar les tècniques que podem emprar per estudiar espais i figures de dimensions superiors. Explorar l'ús del raonament per analogia i emprar-lo per a deduir propietats bàsiques de l'espai 4D.

→ Estudiar extensament les característiques de dues de les figures més bàsiques de quatre dimensions: l'anàloga del cub (hipercub) i la de l'esfera (hiperesfera). Estudiar si és possible extrapolar els resultats amb figures de més de 4 dimensions.

→ Estudiar aquelles figures de 4 dimensions caracteritzades per ser regulars. Descriure els processos pels quals es poden aconseguir i dir-ne les característiques principals.

→ Crear, utilitzant diferents tipus de materials, alguns models tridimensionals de figures de 4 dimensions.

Val a dir que tot i que els objectius del treball s'han mantingut al llarg del procés de creació d'aquest, a mesura que s'avançava hem anat donant més o menys importància als diferents apartats depenent de la quantitat i del tipus d'informació de la que disposàvem. En alguns casos, fins i tot, hem cregut convenient afegir nous capítols per tal de crear un bloc més compacte, homogeni i interelacionat. L'elevada complexitat que comporta l'estudi de les figures més bàsiques ha condicionat el fet que només s'hagi pogut endinsar en l'anàlisi de dues figures de 4 dimensions: l'hipercub i la hiperesfera.

0.3. Temes tractats en el treball

0.3.1. TEMES TRACTATS AL COS DEL TREBALL

El fet que el present treball tracti d'un tema tan poc concret com és la quarta dimensió ens ha obligat a limitar-lo de manera substancial. Tenint en compte l'extensió, el grau de dificultat i la relació entre els diferents apartats hem decidit tractar una sèrie de qüestions. Hem procurat elegir-les de manera que s'ajustessin i responguessin també als objectius que ens havíem marcat. Així, el treball es presenta dividit temàticament de la següent manera:

- Apartat 1: Introducció als conceptes
- Apartat 2: L'hipercub
- Apartat 3: La hiperesfera
- Apartat 4: Polígons regulars, poliedres i politops

Al primer apartat duem a terme una extensa presentació dels conceptes bàsics. Es descriu el significat de "dimensió" i també el d'una "quarta dimensió". Es presenta el raonament per analogia i s'empra aquest per fer unes primeres especulacions sobre figures i espais 4D.
El segon apartat se centra exclusivament en la figura de l'hipercub (l'anàleg del cub però de 4 dimensions). S'estudien les seves característiques, els diferents models tridimensionals d'aquest, les figures que s'obtenen en la seva secció així com aquelles que l'integren. Es cerca una fórmula per trobar les cares de diferents dimensions que constitueix un cub de qualsevol dimensió (n-cub).
El tercer apartat el dediquem a la hiperesfera (anàloga de l'esfera però amb 4 dimensions). En deduïm la seva equació, n'estudiem les seccions i mitjançant l'analogia en determinem algunes de les seves característiques. Cerquem una fórmula per calcular el volum de qualsevol esfera de qualsevol dimensió i mitjançant la computació de les dades analitzem els resultats per a dimensions més grans de 4.
L'últim apartat consisteix en una breu introducció a les figures regulars de 2, 3 i sobretot 4 dimensions. La gran complexitat que comporta l'estudi d'aquestes últimes ha obligat a tractar aquest apartat de manera superficial. Es descriuen les característiques dels politops regulars (figures 4D regulars), es verifica la fórmula d'Euler per figures de 4 dimensions i s'apunta a una generalització.

0.3.2. TEMES TRACTATS ALS ANNEXOS DEL TREBALL

L'elevada extensió del cos del treball ens ha obligat a col·locar algunes informacions que hem cregut interessants en annexos. En concret n'hem elaborat 6. Procedim a fer un breu esment del contingut de cada un d'ells:

- *Annex 1: Audiovisual*
  En aquest annex fem una breu explicació d'un document audiovisual que tracta la figura de l'hipercub i que ha estat traduït i subtitulat al català. S'hi pot trobar la transcripció en anglès i la seva corresponent traducció, així com una breu explicació de les seves parts.

- *Annex 2: Applets*

En ell expliquem el funcionament bàsic d'una sèrie d'applets (inclosos al disc del treball), els quals ens permeten estudiar determinats politops fent ús d'ulleres 3D. A part d'aquests, existeix un últim applet que ens permet estudiar les seccions de tots els politops regulars.

- *Annex 3: La quarta dimensió recreativa*

En aquest apartat fem referència a tot allò que no és estrictament científic que gira al voltant de la quarta dimensió: art, jocs, ciència ficció...

- *Annex 4: Ampliació de l'n-simplex*

En aquest annex ampliem la informació sobre la figura del n-simplex. Desenvolupem una fórmula que ens permet calcular el nombre de r-cares que l'integren i lliguem el resultat amb l'expansió d'un determinat binomi.

- *Annex 5: Fabricació de models*

En aquesta part expliquem breument el procés que hem seguit per a construir cada un dels 3 models d'hipercub que adjuntem amb aquest treball.

- *Annex 6: Càlculs*

Finalment, en l'últim annex hi podem trobar alguns càlculs als quals hem fet referència en el cos del treball.

0.4. Procés d'elaboració, metodologia i ús del disc

0.4.1. PROCÉS SEGUIT PER CREAR EL TREBALL

Per a crear aquest treball hem seguit diferents etapes, força diferenciades entre elles i que procedim a descriure a continuació.
Com que el tema sobre el que s'havia de basar el projecte era força desconegut, el primer període el varem dedicar a llegir la bibliografia adequada, per tal d'entendre els conceptes i poder començar a visualitzar quins serien els punts que caldria introduir al treball. Paral·lelament a aquest procés ja se seleccionaren els temes més interessants i es féu una primera tria molt àmplia que reduiria el gran volum d'informació diversa de la que disposàvem. Val a dir que aquesta primera fase es dugué a terme durant els mesos de juny, juliol, agost i primera meitat de setembre de 2005.
La segona fase s'inicià a mitjans de setembre i en aquesta férem una segona tria de continguts. Seguint els consells del tutor i tenint en compte la informació de la que es disposava, es varen decidir els apartats dels que constaria el treball i se'n féu un petit esborrany de cadascun d'ells.
Finalment, a partir del mes d'octubre i fins el desembre es dugué a terme la redacció del text. Aquest procés comportà també l'organització dels documents gràfics i audiovisuals, així com la creació del disc del treball. La fabricació dels models tridimensionals fou paral·lela a tots aquests processos i tingué lloc entre els mesos de setembre i desembre de 2005.

0.4.2. PRESENTACIÓ DEL TREBALL

El present treball es presenta en fulls DIN A4. La família de lletra emprada per la redacció del cos és *Arial* amb una grandària d'onze punts. Per crear les capçaleres hem utilitzat la família de lletra *Technoid* amb grandàries de quinze i setze punts.
Hem utilitzat un espai entre línies simple tot i ser conscients que es recomanava emprar 1,5 espais. El motiu pel qual hem decidit fer-ho així és l'elevada extensió que prenia el treball si seguíem aquest criteri ja que hi ha una gran quantitat de cos escrit.

0.4.3. UTILITZACIÓ DEL DISC DEL TREBALL

El present treball es presenta dividit en diferents apartats, tal com ja hem explicat anteriorment. La gran quantitat així com la importància del material audiovisual que hem trobat, ha incentivat la creació d'un disc en el que es recopilés tota aquesta informació. A l'interior d'aquest s'hi poden trobar, organitzats per capítols, tots aquells documents digitals als quals hem anat fent referència en el treball. Aquelles informacions que es poden trobar al disc del treball estan indicades de la manera següent:

>2.1. Procés de formació de l'hipercub

Aquest és el nom pel qual trobarem identificat el document audiovisual al disc del treball.

El segon nombre indica quin document digital és. En aquest cas es tracta del primer document de l'apartat 2.

El primer nombre indica a quin apartat del treball correspon. En aquest cas és del capítol 2.

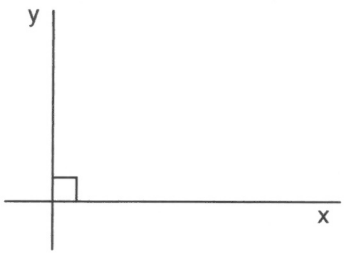
La icona indica que hi ha un document digital disponible al disc.

Així doncs, per trobar el document corresponent a aquest exemple, hauríem de consultar el menú número dos del disc i clicar sobre "Procés de formació de l'hipercub".

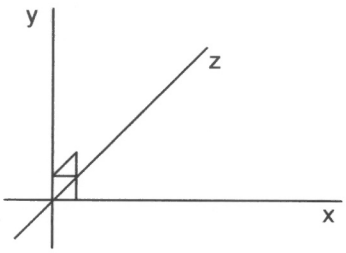
1.1. Introducció al concepte de dimensió

Per comprendre el tema sobre el que es basa aquest treball és indispensable introduir primer el terme "dimensió" i explicar el significat amb el que ens hi referirem durant tot el treball. Hem de dir que es tracta d'una paraula polisèmica i que engloba diversos significats diferents, alhora que comporta una elevada complexitat per fer-ne una definició concisa.

La paraula *dimensió* prové del mot llatí *dimensus*, el qual literalment significa "mesura". Així, físicament entenem *dimensió* com l'extensió mesurable d'un cos en qualsevol dels sentits determinats. Popularment es diu que vivim en un espai de tres dimensions (espacials), la qual cosa vol dir que podem desplaçar un punt a través de tres eixos, cada un dels quals és perpendicular als altres dos.

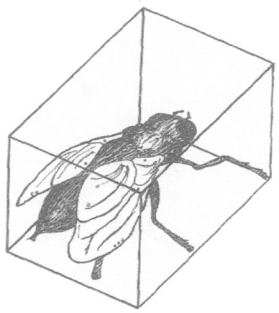


I.1: Espai bidimensional. Els dos eixos (x i y) són perpendiculars, de manera que intersecten formant un angle recte.



I.2: Espai tridimensional. Els tres eixos són perpendiculars entre ells. Com que el gràfic és de dues dimensions, el tercer eix (z) el dibuixem esbiaixat en perspectiva.

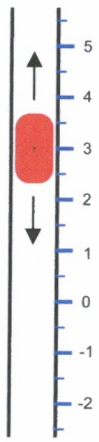
Una altra manera d'explicar el concepte de dimensió és per mitjà dels graus de llibertat. Imaginem, en primer lloc, una mosca, ficada dins una caixa ajustada al tamany del seu cos. En aquest cas, la mosca no pot variar la seva posició, no té cap grau de llibertat.



I.3: La mosca es troba atrapada dins la caixa, sense possibilitat de canviar la seva posició. Si considerem que la caixa és l'espai on viu la mosca, no fa falta donar cap informació per determinar la seva posició exacta, ja que només en pot ocupar una. En aquesta situació no té cap grau de llibertat.

A continuació passem a imaginar aquesta mateixa mosca però aquest cop introduïda en un tub infinitament llarg i de diàmetre pràcticament igual al del cos de l'insecte. Ara la mosca es podrà moure endavant i endarrere. Si nosaltres graduem el tub amb una recta de nombres reals podrem definir la posició exacta de la mosca (entenent-la com un únic punt), estigui on estigui, donant un sol nombre que ens dirà a la distància que es troba de l'origen. Podrem dir doncs que la mosca té un sol grau de llibertat i, per tant, que viu en un espai

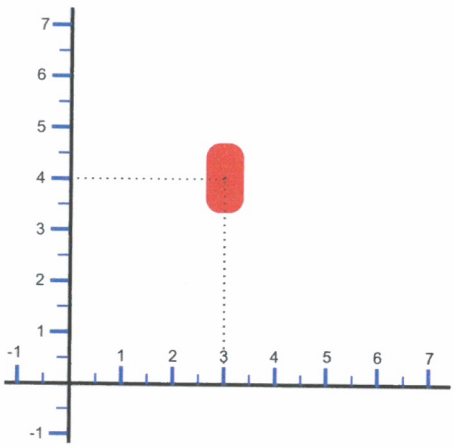
d'una sola dimensió. Arribat a aquest punt podem plantejar una situació lleugerament diferent. Imaginem que el tub en el qual es troba ficada la mosca és flexible i que el podem deformar corbant-lo. Tot i que ara l'espai on hi ha la mosca està corbat en un altre *sentit* (dimensió) això no canvia el fet que la posició de l'insecte segueixi sent perfectament identificable donant un únic valor. El seu espai segueix tenint una sola dimensió (un sol grau de llibertat).



I.4: La mosca (figura vermella), entesa com un punt, es mou endavant i endarrere. L'observador, mirant la graduació del tub, pot definir-ne la posició donant un sol nombre o coordenada, que en aquest cas seria (3).

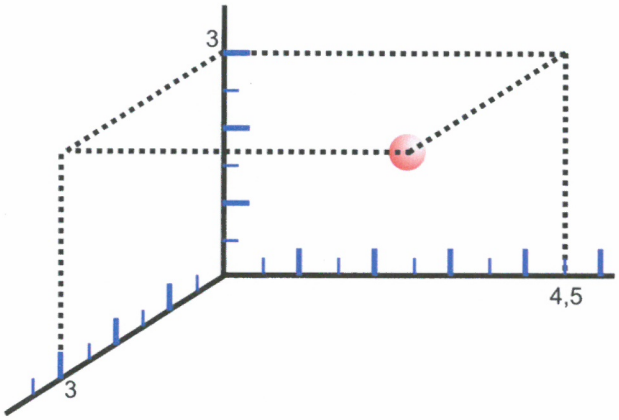
I.5: Tot i que ara l'espai on viu la mosca està corbat en una altra dimensió, la llibertat de l'insecte continua estant limitada a una sola direcció (un grau de llibertat). La seva posició segueix estan perfectament determinada per un sol nombre. L'espai on viu té encara una sola dimensió.

Seguim i ara ens imaginem que la mosca viu a l'espai comprès entre dues làmines de plàstic semi-rígid. Deixem una separació igual al gruix del seu cos. L'insecte disposarà ara d'un nou grau de llibertat; a més de moure's endavant i endarrere podrà desplaçar-se a dreta i esquerra. Per tal de determinar qualsevol posició haurem de dibuixar sobre el vidre dos eixos perpendiculars i graduar-los amb la recta de nombres reals. Projectant la posició de la mosca sobre els eixos obtindrem dos valors, amb els quals definirem la seva posició. La mosca disposarà ara de dos graus de llibertat, podrem dir que viu en un espai de dues dimensions. Anàlogament al que hem fet amb el tub, podem corbar els plàstics de manera que quedin ondulats i es mantingui la separació entre ells. L'espai quedarà deformat en una nova dimensió però això no canviarà el fet que la mosca segueixi vivint en un espai de dues dimensions i que la seva posició segueixi sent perfectament identificable donant dos valors.



I.6: La mosca ara pot moure's en dues direccions diferents (esquerra-dreta i endavant-endarrere) i per tan té dos graus de llibertat. Direm doncs que viu en un espai de dues dimensions i per expressar la seva posició ho haurem de fer mitjançant dos nombres (coordenades) que en aquest cas serien (4,3).

Ja per acabar podem deixar que la mosca voli lliurement a l'interior d'una caixa cúbica transparent. En aquest cas l'insecte disposa d'un altre grau de llibertat més que permet que es desplaci amunt i avall. Si ara l'observador vol determinar-ne la posició haurà de procedir a graduar tres arestes que conflueixin a un mateix vèrtex de la caixa amb la recta de nombres reals i projectar, en un instant determinat, la posició de l'insecte a cada un dels eixos. Així aconseguirà 3 valors que descriuran perfectament el seu emplaçament en un moment concret.



I.7: La mosca (representada per la bola roja) vola ara lliurement, disposant de tres graus de llibertat. Si volem dir en quin lloc es troba hem de projectar la seva posició a les parets del cub tal com s'indica a la figura i donar tres valors, que en aquest cas serien (4,5 , 3 , 3).

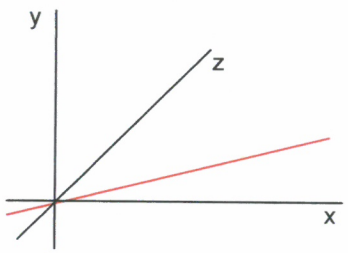
En el món en què vivim fa falta donar tres nombres per definir un punt ja que tenim tres graus de llibertat (amunt-avall, dreta-esquerra i endavant-endarrere). Així doncs diem que vivim en un espai de tres dimensions físiques.
En els exemples anteriors ens hem adonat que quan la mosca vivia en un espai d'una dimensió (dins el tub) o de dues (entre les dues plaques de plàstic), podíem corbar el seu espai cap a una nova dimensió sense que això fes variar els graus de llibertat que tenia l'insecte per moure's. De fet, si la deformació és prou suau, des de l'interior serà pràcticament impossible determinar si l'espai està corbat o no en una altra dimensió. Arribats a aquest punt, i havent vist els tres graus de llibertat (tres dimensions) que tenim en el nostre univers podem perllongar la deducció que hem fet en els dos casos anteriors i preguntar-nos: Pot ser que el nostre espai tridimensional estigui corbat cap una altra dimensió i nosaltres no ho notem? Si realment ho estigués, cap on ho estaria? La resposta a la primera pregunta és complexa i de fet hi ha diversos models actuals de l'univers que discuteixen aquest assumpte. La segona té una resposta simple: si realment el nostre espai tridimensional està corbat ho ha d'estar cap a una nova direcció, l'anomenada quarta dimensió.

1.2. La quarta dimensió

1.2.1. INTRODUCCIÓ AL CONCEPTE

Ara que ja hem exposat el significat de la paraula dimensió podem procedir a concretar més el concepte al voltant del qual gira aquest treball: la quarta dimensió.

La quarta dimensió es defineix com una altra dimensió, anàloga a les altres 3 ja conegudes, que s'estén perpendicularment als tres eixos corresponents a les 3 dimensions esmentades a l'apartat anterior. Es tracta d'una direcció diferent a qualsevol de les direccions que podem assenyalar en el nostre espai tridimensional. Dit d'una altra manera, a l'espai quadridimensional podem trobar una recta (la quarta dimensió) que sigui perpendicular a les tres arestes d'un angle sòlid triedral (com el que trobem al vèrtex d'un cub) i que, per tant, serà perpendicular a qualsevol recta que puguem traçar a l'espai tridimensional.
Com que nosaltres vivim en un espai de tres dimensions no podem assenyalar-ne una quarta, tanmateix sí que en podem fer una projecció, de la mateixa manera que podem dibuixar en un suport de dues dimensions (paper) la projecció d'un cub que realment en té tres. Així, l'eix corresponent a la quarta dimensió el dibuixarem com un quart eix esbiaixat com podem veure en el gràfic següent:



I.8: L'eix marcat en vermell correspon al de la quarta dimensió. Es tracta d'una projecció d'un espai de 4 dimensions a un suport de 2 dues (el paper). Així ens veiem obligats a dibuixar l'eix de forma esbiaixada en perspectiva. Aquesta tècnica és emprada freqüentment per fer projeccions de figures de quatre dimensions sobre suports que en tenen dues. Podrem veure-ho més clarament a l'apartat que fa referència a l'hipercub.

Cal remarcar que quan fem una projecció de qualsevol forma o figura quadridimensional sobre el paper estem fent una doble projecció. En primer lloc projectem a l'espai de tres dimensions una figura que en realitat en té quatre, per la qual cosa dibuixem les arestes corresponents a la quarta dimensió de manera esbiaixada. A continuació fem una segona projecció per poder plasmar l'objecte tridimensional sobre el paper. En aquest pas ens veiem obligats a dibuixar també esbiaixat l'eix que correspon a la tercera dimensió.
Amb aquest comentari simplement volem destacar la gran quantitat d'informació que es perd quan projectem un objecte de quatre dimensions en un suport de dues com és un full. Per evitar aquest problema, alguns dels models que es presenten en el present treball han estat creats per ser vistos mitjançant ulleres estereoscòpiques, amb la qual cosa podem visualitzar les figures en tres dimensions i fer-ne una projecció més fidedigna.
Però arribats a aquest punt no podem evitar preguntar-nos: podem veure la quarta dimensió? Aquesta pregunta té una resposta rotunda i en primera instància desencoratjadora: No. Els espais multidimensionals són impossibles de visualitzar, així que és inútil tan sols intentar-ho. Hermann von Helmholtz (1821-1894), eminent físic alemany,

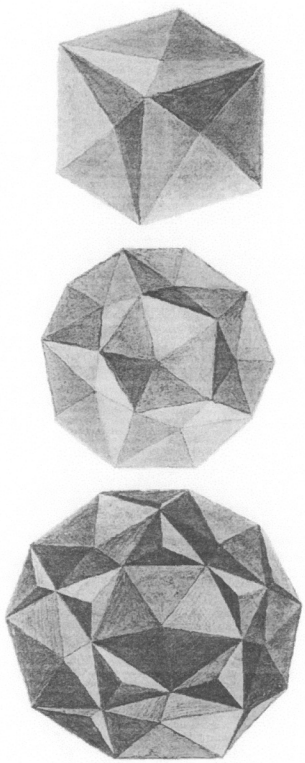
comparava la incapacitat per "veure" la quarta dimensió amb la incapacitat d'un cec per concebre el concepte del color. Tant s'hi val l'eloqüència o concisió que utilitzem per descriure el color vermell a una persona cega, les paraules fracassen a l'hora de definir una cosa tan rica en significat com ho és el color. Fins i tot els matemàtics experimentats i els físics teòrics que han treballat durant anys en espais de més dimensions admeten que no podem visualitzar-los. En lloc d'això la majoria d'ells es limiten a fer-ne interpretacions estrictament algebraiques mitjançant equacions matemàtiques. Una manera de comprendre el motiu pel qual ens és impossible veure dimensions superiors és fent ús d'una sèrie d'analogies, les quals són explicades àmpliament en el capítol 1.4 d'aquest mateix apartat.
Certament, el fet que no puguem observar i ni tan sols interactuar amb altres dimensions físiques fa que sigui complicat d'acceptar (o de no rebutjar) la seva possible existència. Ens podem preguntar el motiu pel qual haurien d'existir altres dimensions a part de les tres que ja coneixem. Peter Freund, professor de física teòrica a l'institut Enrico Fermi de la Universitat de Chicago respon a aquesta qüestió afirmant que les lleis de la naturalesa són més simples en dimensions més altes. "Tradicionalment -ens recorda Freud- els científics s'han mostrat escèptics respecte a les dimensions més altes perquè aquestes no podien ser mesurades i no tenien cap ús concret. No obstant, hi ha una acceptació creixent entre els científics actuals que qualsevol teoria tridimensional és "massa petita" per descriure les forces que governen el nostre univers". Com ell mateix ressalta, un tema fonamental i molt recorrent a l'última dècada de la física ha estat el que *les lleis de la naturalesa es fa més simples i elegants quan s'expressen en dimensions més altes*, que són el seu àmbit natural. Les lleis de la llum i la gravetat troben una expressió natural quan s'expressen en un espai-temps multidimensional. El pas clau per unificar les lleis de la naturalesa consisteix en incrementar el nombre de dimensions de d'espaitemps fins que s'hi puguin acomodar més i més forces. En dimensions més altes, tenim suficient "lloc" per unificar totes les forces físiques conegudes.

1.2.2. DESIGNACIÓ DE LA QUARTA DIMENSIÓ

Com ja hem vist en l'apartat 1.1. l'espai en el què vivim té tres dimensions, ja que disposem de 3 graus de llibertat en els quals ens podem moure. La quarta dimensió definida en els paràgrafs anteriors fa referència a una dimensió *física* (un altre grau de llibertat). No obstant això, una de les teories més famoses de tota la història utilitza una notació lleugerament diferent i que pot induir a confusió. En la teoria de la relativitat d'Einstein, el nostre espai s'explica com un entramat format per les tres dimensions espacials ja conegudes i el temps. Es tracta doncs d'un bloc anomenat espai-temps, de 4 dimensions i en el qual la quarta dimensió és el temps. Els científics d'avui dia, però, estan interessats en anar més enllà de la concepció d'Einstein de la quarta dimensió. Actualment l'interès científic se centra en la cinquena dimensió (una dimensió espacial més a part del temps i les altres tres dimensions espacials). Tot i això, per evitar qualsevol confusió i simplificar els conceptes, en aquest treball la quarta dimensió farà referència a la quarta dimensió espacial i desestimarem el temps si no s'indica el contrari.

1.3. La idea sobre altres dimensions: seguiment històric

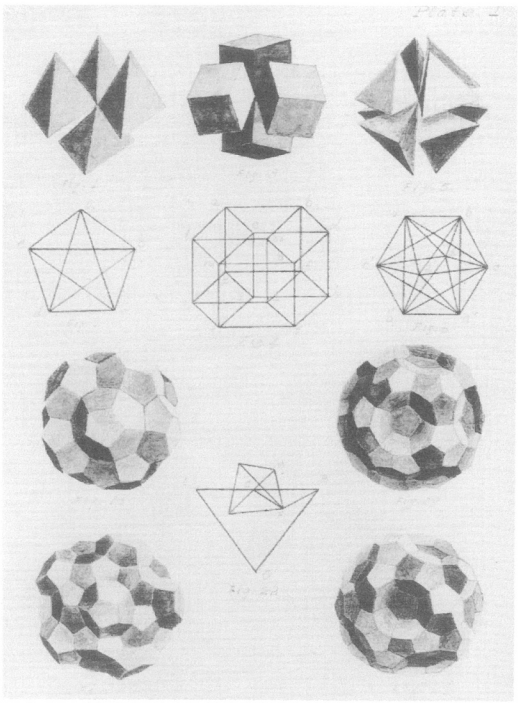
Si ens remuntem en la història de la humanitat descobrim que les especulacions sobre la possibilitat que hi hagi altres dimensions a part de les tres ja conegudes sorgeixen força enrere, fa uns 2400 anys. Una de les primeres persones que de manera indirecta va suggerir aquesta idea fou Plató (427-347 aC).
Al setè llibre de *La República*, una de les seves obres més importants trobem, una famosa al·legoria coneguda com el "mite de la caverna". En ella Plató ens demana que imaginem una estranya raça d'homes que estan tancats en una cova subterrània, encadenats de tal manera que només poden veure les ombres que es projecten a la paret de la cova. Darrere aquests homes hi ha un retaule baix i darrere aquest una foguera. Els objectes es mouen endavant i endarrere sobre aquesta taula i el foc projecta les seves ombres sobre la paret de la cova. Els presoners pensen que aquestes ombres són l'única realitat i ni tan sols s'imaginen que ells mateixos puguin tenir cossos tridimensionals. Parlen i es relacionen però admeten que tot el que existeix són aquelles ombres.
Aquesta idea és particularment interessant i fou molt avançada a la seva època. Els presos no coneixen altra cosa que no siguin les ombres projectades a la paret i per tant interpreten que aquella és tota la realitat que pot existir. Aquesta al·legoria indueix a qüestionar-nos si la dimensionalitat del nostre espai es limita a allò que veiem o si és simplement la projecció d'una realitat que posseeix infinites dimensions.



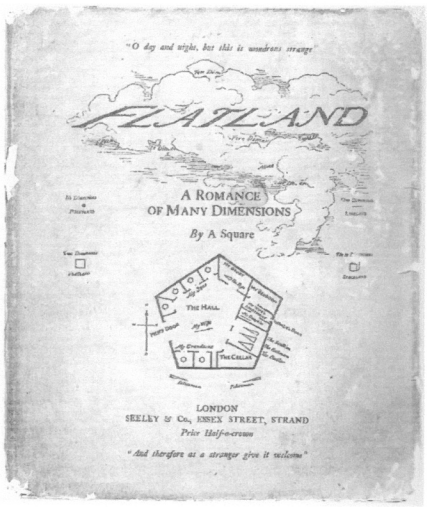
I.9: A l'article de 1880, W. Stringham utilitzà tècniques de geometria analítica per produir il·lustracions que mostraven parcialment figures de quatre dimensions projectades a l'espai 3D.

Tot i que avui en dia podem fer aquest tipus d'interpretació del "mite de la caverna", al seu temps aquest text destacà en altres sentits, principalment filosòfics, la qual cosa va fer que la idea de la quarta dimensió hagués d'esperar encara diversos segles en sortir a la llum pública i ser coneguda socialment.
De fet, això no va tenir lloc fins a mitjans del segle XIX. August Möbius (1790-1868), matemàtic i astrònom alemany, sembla ser que fou la primera persona que va començar a especular de manera explícita sobre l'existència d'una quarta dimensió espacial. El 1827, donant-se compte de que la silueta corresponent a una mà dreta podia ser girada i convertida en la silueta d'una mà esquerra passant la figura a través d'una tercera dimensió (una més que les dues que té l'objecte en sí mateix), Möbius determinà que seria necessari un espai de quatre dimensions per "girar" una mà dreta de manera que aquesta esdevingués una mà esquerra.
A la dècada de 1850, en dos documents, el matemàtic suís Ludwig Schläfli (1814-1895) va determinar totes les figures regulars de quatre dimensions, va calcular les seves propietats numèriques i mètriques i va crear un model d'hipercub de quatre dimensions i un de cinc.
Tot i el seu extraordinari treball, aquest romangué poc conegut i posteriorment s'atribuïren de forma equivocada diversos d'aquests descobriments a un matemàtic americà anomenat William Stringham. El seu article publicat el 1880 al *American Journal of Mathematics* era menys complet que el de Ludwig Schläfli però aquest incloïa per primera vegada diverses il·lustracions de figures

quadridimensionals. Aquestes varen impulsar de forma extraordinària l'estudi de figures de dimensions superiors i varen captivar la imaginació de matemàtics i públic en general.
També per aquells temps, el filòsof i matemàtic Charles H. Hinton (1853-1907) expressà el seu convenciment de que les persones podien ser entrenades per veure la quarta dimensió i que de l'experiència se'n seguiria una notable alliberació espiritual i intel·lectual. El seu mètode d'entrenament consistia en estudiar l'aparença canviant d'uns hipercubs (l'anàleg del cub en un espai de quatre dimensions) pintats segons un determinat codi de colors mentre aquests travessaven un espai tridimensional.
El 1884, el mossèn i educador anglès Edwin Abbot Abbot (1838 – 1926) va publicar una novel·la titulada *"Planilandia: una novel·la de moltes dimensions"* sota el títol original *"Flatland: a romance of many dimensions"*. Basada en una versió simplificada del mètode de Hinton, narra l'experiència d'uns sers bidimensionals que són visitats per una esfera del món tridimensional. Els "planilandesos" intenten comprendre l'existència d'una dimensió superior des de la seva posició en un món de dues dimensions al mateix temps que es fa una intel·ligent sàtira de la societat victoriana. Encara avui dia la novel·la d'Abbot és considerada una obra mestra per la seva simplicitat i alhora per la gran quantitat d'eines que atorga al lector que s'inicia a l'especulació sobre dimensions superiors. Com veurem més endavant l'analogia d'un món bidimensional és indispensable a l'hora de preveure comportaments i interpretar seccions de figures de dimensions superiors a la nostra.



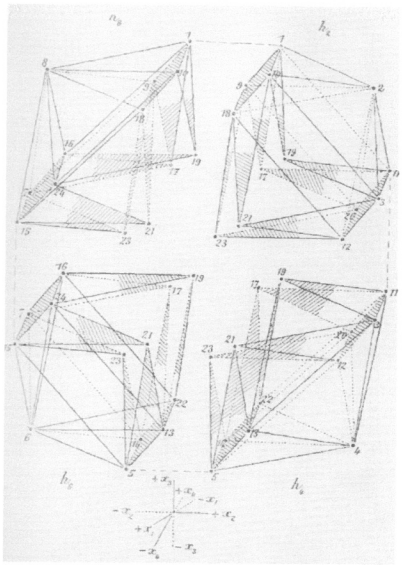
I.10: Dibuixos publicats el 1880 per W. Stringham.



I.11: Coberta de la primera edició de la novel·la de E. A. Abbot

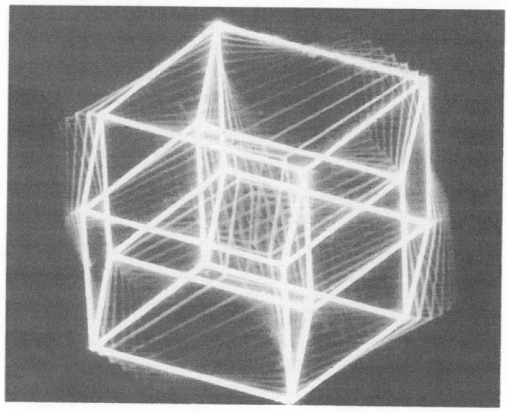
A finals del segle XIX va créixer l'interès popular per la quarta dimensió. Aquest fet vingué principalment motivat pels notables descobriments matemàtics que havien tingut lloc a finals d'aquell segle. Durant la dècada de 1840, Arthur Cayley a Anglaterra i Hermann Grassmann a Alemanya vàren publicar les primeres obres significatives sobre espais n-dimensionals. Mentre això passava, Bernhard Riemann desenvolupava la geometria no euclidiana, que posteriorment resultaria ser clau en l'exploració de dimensions superiors. A començaments del segle XX "la quarta dimensió" era un tema d'aparició freqüent en les publicacions científiques americanes. Cal destacar la iniciativa que al 1909 la revista *Scientific American* va impulsar i que consistia en recompensar amb $500 aquell article de menys de 2500 paraules que millor aconseguís descriure el concepte de la quarta dimensió. Es varen rebre 245 assajos d'arreu del món, prova irrefutable de l'elevat interès social que despertava el tema.

També a principis del segle XX, Jules-Henri Poincaré (1854-1912), considerat el matemàtic i pensador francès més important de la història, va discutir repetidament la possibilitat de percebre la quarta dimensió, donant credibilitat a especulacions fetes anteriorment. El 1902 publicà *"Science and Hypotesis"* , on explicava que la geometria i el concepte de la dimensionalitat de l'espai no existeix a la nostra ment ni l'adquirim amb els nostres sentits.
Al mateix temps que Poincaré creava la seva obra la idea de la quarta dimensió s'estenia àmpliament entre els artistes de l'època. Maurice Princet, matemàtic que treballava per una companyia asseguradora, va ensenyar les bases de la geometria tetradimensional als seus amics artistes entre els quals s'hi trobava Marcel Duchamp, Juan Gris, Jean Metzinger i probablement Pablo Picasso entre altres. De fet, el corrent artístic del cubisme deu les seves bases a la voluntat de visualitzar objectes (bàsicament cubs) des d'una dimensió superior.



I.12: Imatges que acompanyaven el text de E. Jouffret.

El 1903, E. Jouffret publicà a França un text elemental sobre geometria de quatre dimensions que incloïa noves il·lustracions.
D'altra banda, Poincaré afirmà que tot i que era teòricament possible veure la quarta dimensió, això només seria possible per una persona que dediqués tota la seva vida a entrenar-se per a tal propòsit. Aquesta avaluació tan pessimista fou reforçada el 1947 pel famós geòmetre H. S. M. Coxeter (1907-2003) que sostingué que només una o dues persones aconseguirien visualitzar la quarta dimensió amb la mateixa facilitat com ho podem fer nosaltres amb les altres tres. Però només un quart de segle més tard el psicòleg de la percepció Heinz Von Foerster va anunciar que qualsevol subjecte podia aprendre el mètode per veure la quarta dimensió.
Ja a l'últim quart del segle XX, una de les persones amb més influència en l'estudi de la quarta dimensió ha estat el Dr. Thomas F. Banchoff. Professor de matemàtiques especialitzat en geometria de la quarta dimensió, imparteix classes a la universitat de Brown. Juntament amb els seus col·laboradors del *Brown's Computer Graphics Laboratori*, Banchoff fou pioner en la utilització de gràfics animats generats per ordinador per estudiar seccions i projeccions d'objectes de quatre dimensions. Juntament amb el professor Charles Strauss, Banchoff gravà el 1978 un document audiovisual que explica detalladament el procés d'intersecció de d'hipercub amb un espai tridimensional així com les diferents projeccions d'aquest. El document es titula *Hypercube: Projections and Slicing* i s'hi fa referència en posteriors apartats d'aquest mateix treball. Cal també destacar el treball d'altres matemàtics com Rudy Rucker, amb llibres com *La Quarta Dimensió* o *Spaceland, A Novel of the Fourth Dimension* i Michio Kaku, físic teòric de la Universitat de Nova York i principal desenvolupador de la teoria de supercordes.



I.13: Hipercub oscil·lant generat per ordinador. Aquesta fou una de les primeres visualitzacions informàtiques creades per T. F. Banchoff.

1.4. La importància de l'analogia

Abans d'abordar l'estudi de la quarta dimensió des d'un punt de vista estrictament matemàtic és interessant començar a familiaritzar-s'hi d'una manera més pràctica. Com ja he comentat en la breu ressenya històrica feta anteriorment, una de les obres més influents i que més ha ajudat a comprendre el concepte de les dimensions és *"Flatland: a romance of many dimensions"*, la qual fou publicada el 1884. El seu autor, Edwin A. Abbott, era educador i matemàtic d'ideologia liberal i va concebre aquesta obra amb una doble finalitat. En primer lloc dugué a terme una intel·ligent sàtira social de l'època i d'altra banda creà un text que dotava al lector amb una gran quantitat d'eines que li permetrien interioritzar determinats principis geomètrics gairebé de manera intuïtiva. Utilitzarem algunes de les situacions il·lustrades en el llibre per començar a habituar-nos amb el concepte de dimensions superiors.
No obstant això cal dir que en el llibre no apareix el concepte de "la quarta dimensió". Com és possible doncs que puguem utilitzar-lo per aquest treball en el que pretenem estudiar una dimensió superior a la nostra? La resposta és senzilla i resulta ser la idea clau:

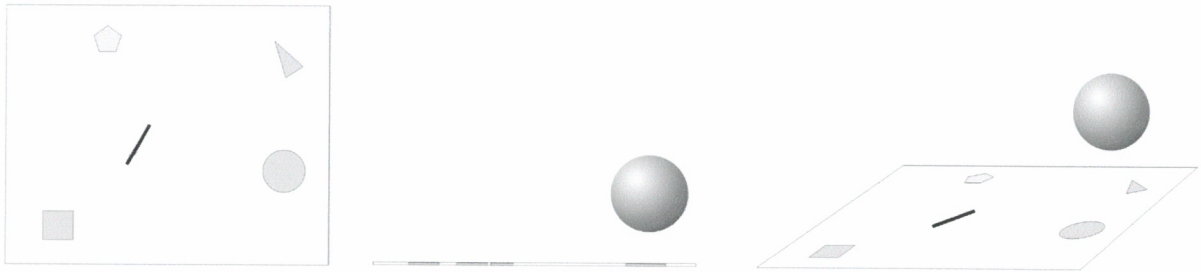
→ *L'espai quadridimensional és a l'espai tridimensional, com l'espai tridimensional és a l'espai bidimensional.*

Aquesta última afirmació significa que si ens situem en un espai bidimensional i estudiem què succeeix en la interacció d'aquest amb l'espai tridimensional podrem raonar per *analogia* i imaginar què passaria a l'espai tridimensional si aquest interactués amb l'espai de quatre dimensions. Dit d'una altra manera, un ésser que visqués en un espai de dues dimensions i intentés comprendre o imaginar una tercera dimensió desconeguda per ell es trobaria en la mateixa situació en que ens trobem nosaltres, éssers tridimensionals, davant el repte de comprendre una quarta dimensió.
Hem fet menció d'una paraula en les línies anteriors que resulta ser de vital importància per a comprendre el treball: l'analogia. Analogia es defineix com la relació existent entre coses o persones que presenten característiques comunes; semblança, similitud. Aquí es tracta de similitud entre dues dimensions: la segona i la tercera.
A continuació presentem alguns exemples en els que fem servir l'analogia entre dimensions per deduir propietats i característiques de l'espai i els objectes 4D. En primera instància descrivim la situació coneguda en l'espai de dues dimensions i seguidament l'extrapolem al cas de tres dimensions.

a) Impossibilitat de comprendre dimensions superiors

Planilandia és un univers infinit de dues dimensions que el podem imaginar com un full de paper primíssim d'extensió il·limitada. Els seus habitants només poden ser punts, segments, polígons o cercles, els quals viuen i es desplacen pel seu interior. En una ocasió, una esfera de tres dimensions s'apropa a l'univers planilandès i intenta convèncer als seus habitants de l'existència d'una tercera dimensió però aquests, evidentment, no entenen que hi pugui haver una altra dimensió: ells mateixos són éssers bidimensionals, l'univers en el que viuen té dues dimensions i tot el que hi ha en aquest també té solament dues dimensions. Qualsevol intent d'imaginar una tercera dimensió serà infructuós doncs

no disposen del tercer grau de llibertat que els fa falta per explorar aquesta tercera "direcció".

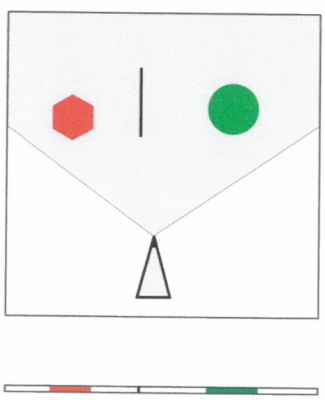


I.14: Planilàndia vista en planta, perfil i en perspectiva. Els seus habitants, sers de dues dimensions que viuen confinats al seu univers bidimensional no coneixen l'existència d'una tercera dimensió i ni tan sols la poden imaginar. La seva vista, només els permet veure línies i punts davant seu que representen els seus compatriotes. L'esfera tridimensional és invisible per ells sempre que es trobi a una altura diferent a la que ocupa l'espai bidimensional de Planilandia.

Vista la situació de desavantatge en la que es troben els planilandesos a l'hora d'interpretar la tercera dimensió que proclama l'esfera tridimensional, ja podem suposar que nosaltres ens trobem en una situació semblant quan intentem imaginar la quarta dimensió. El nostre món és tridimensional, totes les coses que el conformen tenen aquesta mateixa característica i és completament inútil que ens escarrassem en intentar visualitzar una quarta "direcció". No tenim cap mitjà amb el que "elevar-nos" cap a aquesta, la naturalesa del nostre univers ens ho impedeix.

b) Visió de l'espai n-dimensional des d'una dimensió superior (n+1)

Centrem-nos ara en el què observa un dels habitants de Planilandia. El seus ulls només són capaços de veure els perfils de la resta d'habitants, que es limiten a rectes i punts. Tenen doncs una visió unidimensional. Però ara suposem que l'esfera de la que hem parlat en l'exemple d'abans està dotada de vista i mira el món de Planilandia. Tot i que els seus habitants tenen una visió molt pobra del seu univers que es limita a punts i línies, si aquest és observat des d'una dimensió superior el resultat és molt diferent. L'esfera serà capaç de veure el conjunt de persones que hi ha en una determinada àrea, podrà mirar dins les cases i serà capaç de veure fins i tot l'interior dels planilandesos. Dit d'una altra manera, des d'una dimensió superior, qualsevol punt de l'espai bidimensional pot ser observat sense cap mena d'impediment. Per molt que un planilandès tapi un objecte determinat l'esfera el podrà veure completament degut al grau de llibertat extra del que disposa.



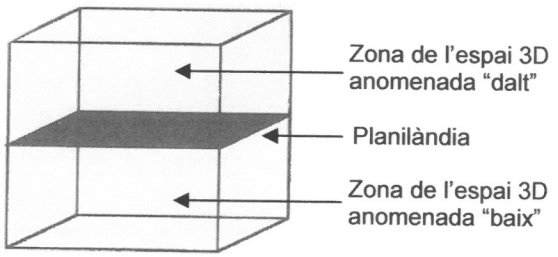
I.15: En la imatge superior veiem Planilandia des de la perspectiva de l'esfera elevada en la tercera dimensió. La zona ombrejada representa el camp de visió del triangle i a la part inferior s'observa el que aquest veuria: qualsevol polígon, esfera o recta és, als ulls d'un planilandès, una simple recta de més o menys longitud. La riquesa visual que s'obté en elevar-se en una altra dimensió és molt notable.

Feta aquesta apreciació en el món bidimensional podem intuir per analogia quina visió podria tenir un suposat ésser de quatre dimensions del nostre món tridimensional. En primer lloc, seria capaç de veure qualsevol objecte del

nostre espai, per molt tapat i tancat que aquest estigués. El grau de llibertat suplementari del que disposaria li permetria poder veure cada racó de dins una sala tancada o fins i tot l'interior del nostre cos. Als seus ulls no podríem amagar absolutament res. De la mateixa manera podem preveure el tipus de sistema visual que hauria de tenir. En el món de Planilandia els ulls dels seus habitants són simples punts o línies que obtenen imatges també només de línies (unidimensionals). Al món tridimensional les persones disposem dels ulls, els quals perceben una sèrie d'imatges bidimensionals. La nostra retina té solament dues dimensions. Si existís un ser de 4 dimensions, probablement disposaria d'un ull en forma esfèrica, recoberta de terminals nerviosos; la qual cosa li permetria obtenir imatges de tres dimensions.

c) L'espai d'unes determinades dimensions (n) divideix en dues parts l'espai de dimensió immediatament superior (n+1)

Tal com ja hem dit, podem imaginar Planilàndia com un full de paper prim que s'estén il·limitadament. Si aquest full de paper infinitament gran està situat en un espai que té una dimensió més (l'espai tridimensional), l'univers de Planilàndia dividirà el nostre espai 3D en dues parts separades l'una de l'altra. Si un ser tridimensional que es troba per sobre de Planilàndia vol passar a la part inferior, forçosament haurà de travessar aquest món bidimensional per arribar-hi. Podem anomenar la zona del nostre univers situat per sobre de Planilàndia amb el mot "dalt" i la zona que es troba per sota "baix".



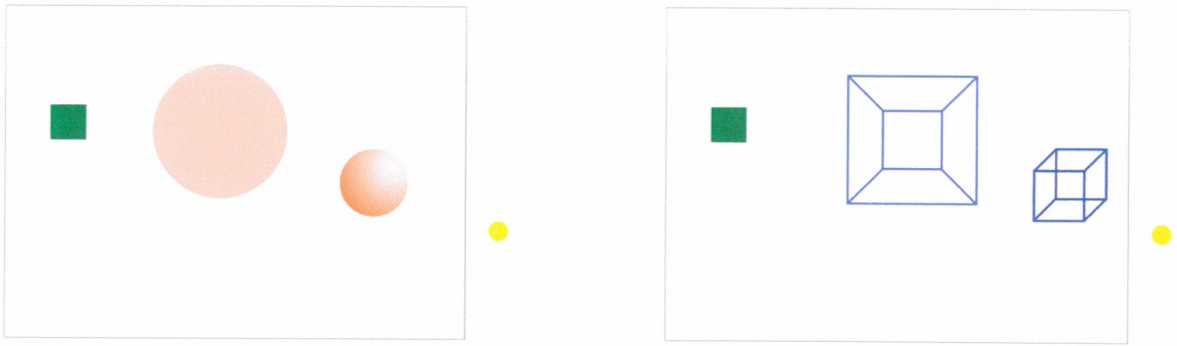
I.16

Raonant per analogia podem donar-nos compte que un espai 3D i un espai 4D interactuaran d'una manera semblant. Suposant que el nostre espai tridimensional està ficat dins un espai de 4 dimensions, aquest últim quedarà dividit en dues parts pel de 3 dimensions. Nosaltres no podem interactuar amb l'univers 4D però si que podem donar noms a les seves dues meitats. Seguint la notació que proposà Charles H. Hinton anomenarem "ana" la porció d'espai 4D situat en una direcció "superior" a la nostra i "kata" a la porció situada per "sota". Qualsevol objecte quadridimensional que vulgui passar de ana a kata o a l'inrevés, es veurà obligat a travessar el nostre univers 3D.

d) Possibilitat de veure les projeccions d'objectes de dimensions superiors

Com ja hem dit en l'apartat a, un ésser d'unes determinades dimensions no pot imaginar un espai de més dimensions i, en principi, tampoc hi pot interactuar. No obstant aquest sí que pot recórrer a alguns mètodes per tal d'estudiar objectes de dimensions superiors. Un d'aquests mètodes és el de les projeccions. Imaginem Planilàndia un altre cop i l'esfera tridimensional situada per sobre. Considerem també que l'esfera és translúcida. Els éssers

2D no la poden veure però si aquesta se situa entre una font de llum i l'univers planilandès la seva ombra es projectarà sobre aquest. Els habitants bidimensionals veuran, per tant, com apareix un cercle al seu univers. Si en comptes d'una esfera fem el mateix experiment amb un cub translúcid, el resultat serà una mica més complex: per als planilandesos haurà aparegut un quadrat, a l'interior del qual se n'hi trobarà un altre amb els vèrtexs units amb el gran tal com es mostra en la figura de sota. Amb una projecció es perd bona part d'informació de la figura original però ajudats amb altres mètodes permet fer-nos-en una bona idea.



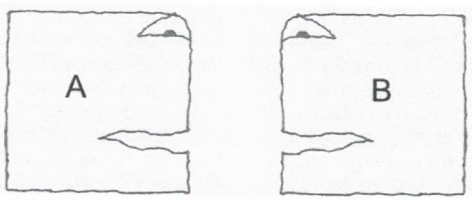
I.17: A la esquerra veiem com la projecció bidimensional de l'esfera és un cercle. A la imatge de la dreta podem observar una de les diverses projeccions que pot tenir un cub. Si aquest gira o es mou, la imatge projectada canviarà.

e) Possibilitat de veure les seccions d'objectes de dimensions superiors

Una altra de les tècniques que podem emprar per estudiar figures de dimensió superior és la de la secció. Considerem un objecte de 3 dimensions que travessa l'univers planilandès. Els sers bidimensionals que viuen en aquest veuran una successió de figures bidimensionals que canvien al llarg del temps. Aquestes figures són les seccions de l'objecte tridimensional mentre està traspassat el seu univers.
De la mateixa manera, si un objecte de 4 dimensions travessa el nostre espai de 3, podrem observar una successió de figures tridimensionals que canvien de forma al llarg del temps.
La tècnica del seccionament és complexa i ens hi referirem posteriorment en l'estudi de dues de les figures quadridimensionals més significatives: l'hipercub i la hiperesfera.

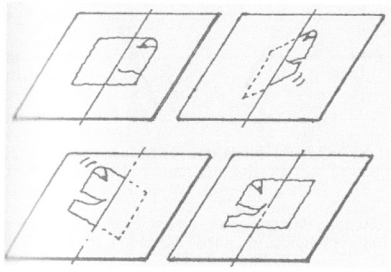
g) Rotació d'objectes de n dimensions en espais de dimensió (n+1)

Tornem a Planilàndia i ens fixem ara en dos dels quadrats que allí viuen. Es tracta de dos quadrats (A i B) de característiques idèntiques però que difereixen en el fet que un és la imatge mirallada de l'altre. És a dir que mentre un d'ells té la boca i l'ull a la dreta, l'altre els té a l'esquerra.

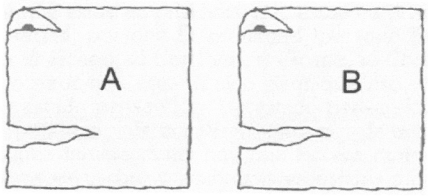


I.18

A continuació, nosaltres, des del nostre espai tridimensional, agafem el quadrat A i l'aixequem amunt, traient-lo fora del seu univers bidimensional, li donem la volta i el tornem a deixar dins de Planilàndia. El quadrat A s'haurà convertit en la seva imatge mirallada i A i B esdevindran completament idèntics.



I.19: El quadrat A dona una volta a través de l'espai 3D.



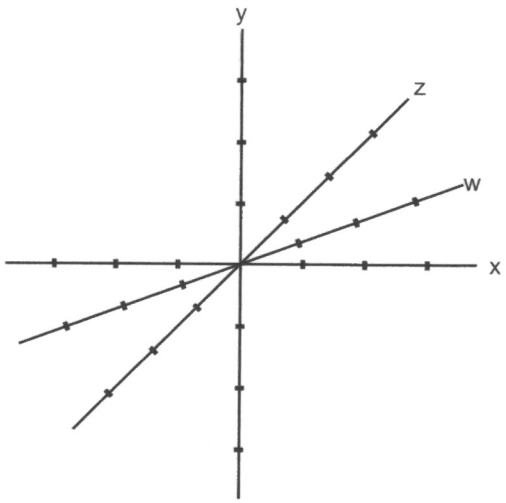
I.20: El quadrat A i el quadrat B són idèntics ja que A s'ha transformat en la seva imatge mirallada.

Fet aquest experiment ja podem deduir què passaria si fóssim girats en l'espai quadridimensional: esdevindríem la nostra imatge mirallada. Totes les nostres característiques físiques que trobem a la meitat dreta del nostre cos passarien a trobar-se just al mateix lloc però al costat esquerre i a l'inrevés. Aquest tipus de canvi només és possible si rotem en una dimensió superior.

1.5. Característiques matemàtiques de l'espai 4D

1.5.1. SISTEMA DE COORDENADES

Com ja hem dit en el primer apartat, en l'espai de 4 dimensions és possible traçar quatre línies perpendiculars entre elles, les quals representen els quatre graus de llibertat que existeixen. Partint del punt en que es creuen les línies (origen), graduarem aquestes per tal d'aconseguir quatre eixos de coordenades com aquests:



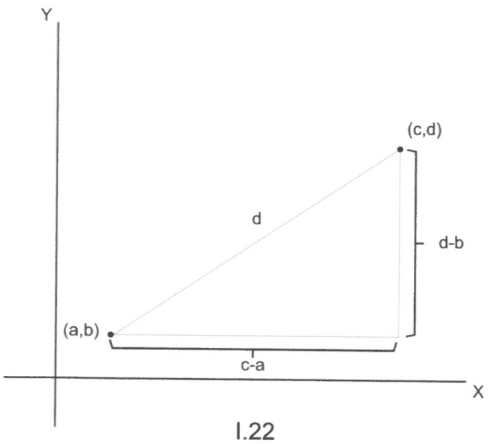
I.21

L'eix x i l'eix y corresponen a la primera i a la segona dimensió i mitjançant aquests podem determinar un punt en l'espai bidimensional.
Mitjançant un tercer eix z, que s'estén per la tercera dimensió som capaços de situar qualsevol punt en el nostre espai tridimensional. Cal considerar, però, que la imatge de la dreta és una projecció sobre paper, per la qual cosa ens veiem obligats a dibuixar el tercer eix esbiaixat en perspectiva simbolitzant que s'estendria per la tercera dimensió.
El quart eix, que hem anomenat w, seria el que s'estendria cap a la quarta. En aquest cas també hem de dibuixar-lo en perspectiva doncs el paper té dues dimensions i per representar aquest sistema de coordenades farien falta quatre graus de llibertat.
Tal com ja hem introduït prèviament, per situar un punt en un espai de 4 dimensions cal donar 4 coordenades; una per cada una de les direccions en les que es pot moure. En primer lloc s'expressa la que correspon a l'eix x (dreta-esquerra), a continuació la de l'eix y (dalt-baix), la de l'eix z (davant-darrere) i finalment la de l'eix w (ana-kata).

(x,y,z,w)

1.5.2. GENERALITZACIÓ DE LA FÓRMULA DE LA DISTÀNCIA

En la geometria analítica, una de les fórmules més emprades i més fonamentals és la que s'usa per calcular la distància entre dos punts donats. Aquesta serà emprada posteriorment al llarg del treball i és per això que la presentem a continuació. Comencem amb un espai bidimensional:



I.22

Volem calcular la distància d que hi ha entre el punt (a,b) i el punt (c,d). Si dibuixem un triangle rectangle tal com s'indica a la figura, veiem com aquest estarà format per dos catets de longitud (d-b) i (c-a) i la seva hipotenusa serà d. Aplicant el teorema de Pitàgores en aquest triangle obtenim l'equació següent:

$$d^2 = (c-a)^2 + (d-b)^2$$

Aïllem la d i aconseguim una fórmula que ens permet calcular les distàncies entre punts situats en el pla:

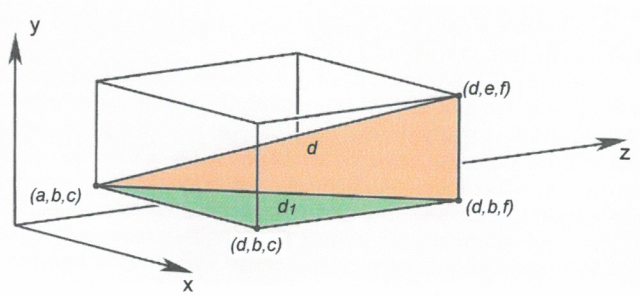
$$d = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$$

En general:

→ Distància entre (x_1,y_1) i (x_2,y_2):

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Avancem i procedim a cercar una fórmula per calcular distàncies en espais de 3 dimensions. En aquesta ocasió desitgem saber la distància entre el punt (a,b,c) i el (d,e,f).



I.23

Ho farem per parts i en primer lloc buscarem el punt que, estant per sota del (d,e,f), tingui la mateixa altura que el (a,b,c). Aquest serà el (d,b,f). Així aconseguim dos punts que es troben a la mateixa alçada (al mateix pla) i, per tant, podem emprar la fórmula de la distància per espais de dues dimensions, tot obviant la segona coordenada que és comuna en ambdós punts.

Distància (d_1) entre (a,c) i (d,f):

$$d_1 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$d_1 = \sqrt{(a-d)^2 + (c-f)^2}$$

Un cop calculat d_1 podem aplicar el teorema de Pitàgores amb el triangle restant (ombrejat de color taronja) per trobar la distància d:

$$d^2 = d_1^2 + (b-e)^2$$

$$d^2 = \left(\sqrt{(a-d)^2 + (c-f)^2}\right)^2 + (b-e)^2$$

$$d^2 = (a-d)^2 + (c-f)^2 + (b-e)^2$$

$$d = \sqrt{(a-d)^2 + (b-e)^2 + (c-f)^2}$$

Expressat de manera general:

→ Distància entre (x_1,y_1,z_1) i (x_2,y_2,z_2):

$$d = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2}$$

Arribats a aquest punt podem extrapolar com serà la fórmula de la distància per dos punts situats en un espai de quatre dimensions. Tenint en compte que la quarta dimensió és perpendicular a les altres tres, hauríem de repetir el procés anterior afegint-hi un pas més, amb la qual cosa aconseguiríem:

→ Distància entre (x_1,y_1,z_1,w_1) i (x_2,y_2,z_2,w_2):

$$d = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2 + (w_1-w_2)^2}$$

2.1. Introducció al concepte de quadrat, cub i hipercub

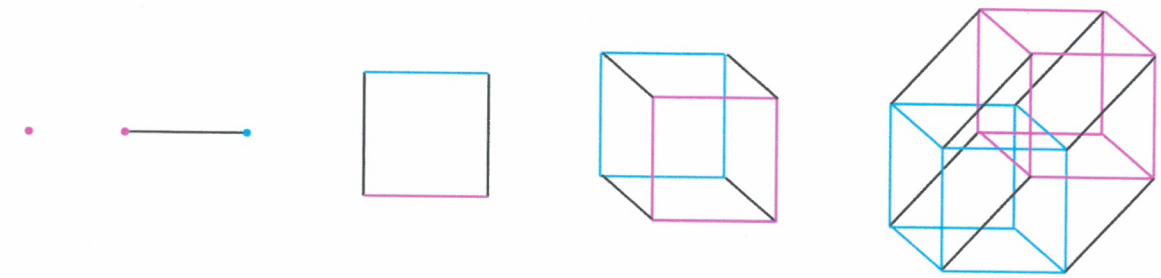
Els conceptes de quadrat, cub i hipercub sorgeixen d'una procés geomètric molt simple. Comencem amb un punt, que no té cap dimensió. Si aquest el movem en una determinada direcció aconseguim un segment unidimensional, limitat per dos punts. Movent aquest perpendicularment a ell mateix generem una figura plana de dues dimensions: el quadrat; el qual està limitat per 4 punts. Si aquest pla el desplacem perpendicularment a ell mateix obtindrem una figura sòlida tridimensional anomenada cub. Arribats a aquest punt, podem repetir el procés que portem fent fins ara i desplaçar novament el cub per generar una altra figura. Aquest desplaçament el durem a terme en una direcció perpendicular a les 3 ja utilitzades prèviament, per tant serà cap a la quarta dimensió. La figura que obtindrem tindrà 4 dimensions i l'anomenarem *hipercub*. En determinats contextos utilitzen el terme *tesseract* per referir-se a un cub de 4 dimensions.
Com succeeix amb totes les figures quadridimensionals, ens és impossible veure l'hipercub completament i els únics mètodes que podem utilitzar per estudiar la seva geometria són mitjançant les seves projeccions i seccions. En el cas de l'hipercub, existeixen tres models tridimensionals d'aquest, als quals ens hi referirem de manera separada.

2.2. Models tridimensionals d'hipercubs

2.2.1. MODEL EXTRUSIONAT

Aquest és el model més fàcil d'explicar però també el més complex d'interpretar degut a la gran quantitat de línies que s'entrecreuen. Per a obtenir-lo ens referirem altre cop a la sèrie que hem explicat en l'apartat anterior. Com ja s'ha dit, si movem un punt obtenim un segment. Si desplacem aquest segment perpendicularment a si mateix obtenim un quadrat. Si repetim el procés amb el quadrat obtindrem un cub i finalment si desplacem el cub cap a la quarta dimensió (direcció "ana" o "kata") obtindrem una figura que anomenarem hipercub.

>2.1. Procés de formació de l'hipercub

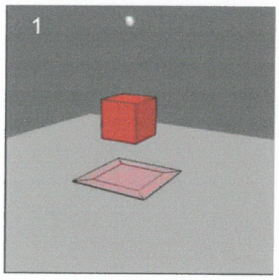


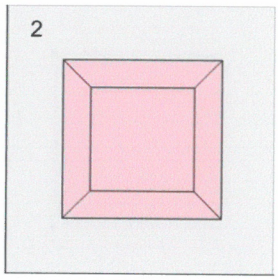
En les representacions gràfiques anteriors topem un altre cop amb el problema de dibuixar figures de dimensions superiors sobre el paper. Efectivament, tot i que en teoria totes les arestes d'un hipercub haurien de ser perpendiculars entre elles, el fet de dibuixar el model sobre un suport bidimensional ens obliga a utilitzar la perspectiva i a esbiaixar aquelles arestes que s'estenen cap a la tercera i, òbviament, també cap a la quarta dimensió.

2.2.2. MODEL DE PROJECCIÓ CENTRAL

Aquest model no resulta ser tan intuïtiu com el primer i per tant ens ajudarem d'unes captures de vídeo per explicar-lo.

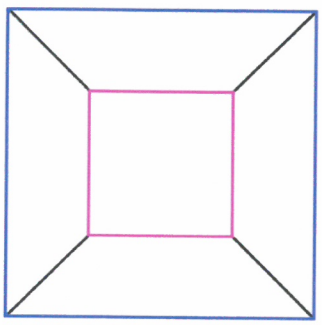
>2.2. Projecció central de l'hipercub



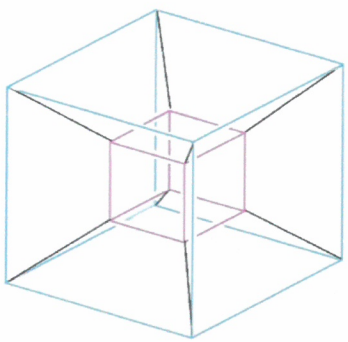


A la imatge 1 podem observar com una font de llum projecta la silueta d'un cub translúcid sobre una superfície de dues dimensions. A la captura 2 observem el resultat d'aquesta projecció bidimensional del cub 3D.

Feta aquesta observació podem raonar per analogia i imaginar que un hipercub de 4 dimensions és il·luminat per una font de llum i la seva ombra és projectada en el nostre espai tridimensional. En el cas del cub, la seva projecció en una dimensió menys són dos quadrats concèntrics un dins l'altre i els vèrtexs dels quals estan units per arestes. De manera anàloga podem dir que si un hipercub 4D és projectat en el nostre espai 3D el resultat seran dos cubs concèntrics, situats un dins l'altre i amb els corresponents vèrtexs units.



Vista frontal del model de projecció central d'un hipercub.



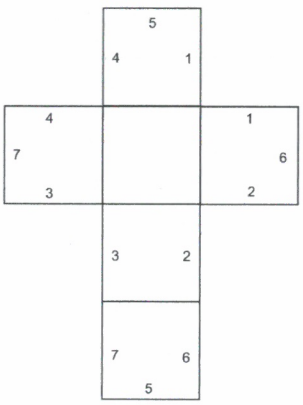
Vista en perspectiva del mateix hipercub. Distingim un cub petit situat dins un altre de gran amb els corresponents vèrtexs units.

Aquest model també comporta problemes geomètrics en el moment de construir-lo i més encara quan cal representar-lo sobre el paper. Les seves cares, que teòricament haurien de ser cúbiques, han de quedar deformades per tal d'encaixar en un espai de 3 dimensions.

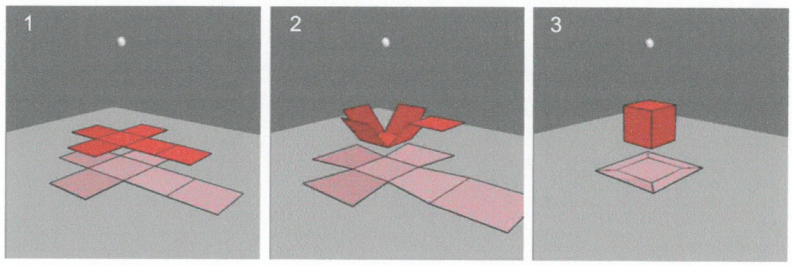
2.2.3. MODEL D'HIPERCUB DESPLEGAT

Una tercera manera d'estudiar una figura quadridimensional com l'hipercub és estudiant-lo desplegat. Un cub tridimensional el podem desmuntar i presentar-lo com una figura plana de dues dimensions formada per 6 peces quadrades (una per cada cara del cub original). De la mateixa manera, podem desplegar un hipercub 4D amb la qual cosa aconseguirem una figura tridimensional constituïda per 8 cubs 3D (un per cada una de les seves "cares" cúbiques).
Un ser bidimensional de Planilàndia podrà veure el cub desplegat però no podrà observar-lo un cop muntat. En comptes d'això si que podrà veure quines cares haurien d'anar unides amb quines altres tal com es mostra a continuació:

>2.3. Muntatge del cub

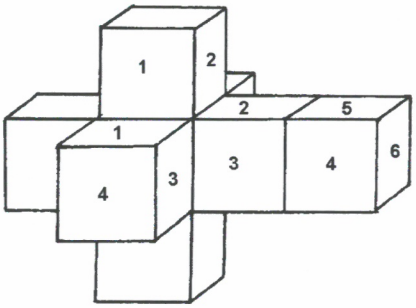


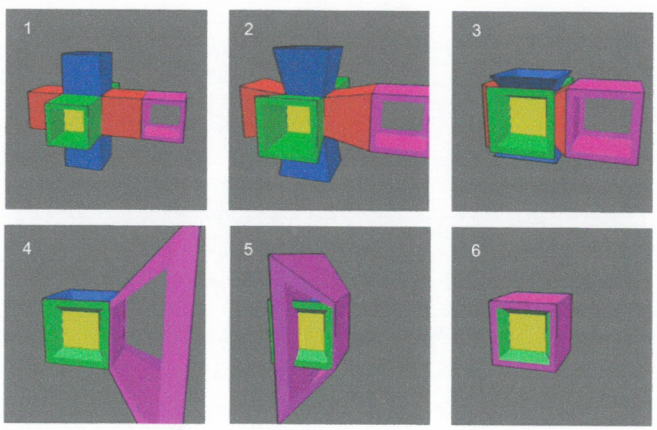
El cub 3D desmuntat amb els nombres que indiquen quines cares s'han d'unir per muntar-lo.



Procés a seguir per muntar el cub a l'espai 3D. Un planilandès només podria veure la ombra del cub mentre es munta, tal com es pot observar a la part inferior de les seqüències.

>2.4. Muntatge de l'hipercub





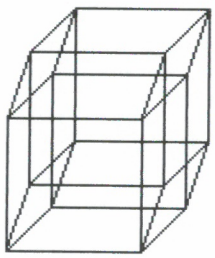
Nosaltres no podem veure l'hipercub muntat però de la mateixa manera que un planilandès pot veure el cub abans de muntar-lo, si que podem apreciar el conjunt de cubs tridimensionals que el conformen abans que aquest sigui muntat cap a la quarta dimensió. La imatge superior esquerra ens mostra parcialment com s'haurien d'adherir les cares per muntar el cub en un espai quadridimensional.
D'altra banda, mentre estem muntant el cub tridimensional, sí que podem projectar l'ombra d'aquest en un espai 2D tal com podem observar a la part inferior de les seqüències del primer vídeo (vídeo >2.3.). De manera anàloga, podem projectar sobre un espai tridimensional l'ombra d'un hipercub mentre aquest és muntat. Aquest procés és el que podem observar a les captures de la part superior dreta (pertanyents al vídeo >2.4.).

2.3. Característiques de l'hipercub

2.3.1. CARACTERÍSTIQUES GEOMÈTRIQUES

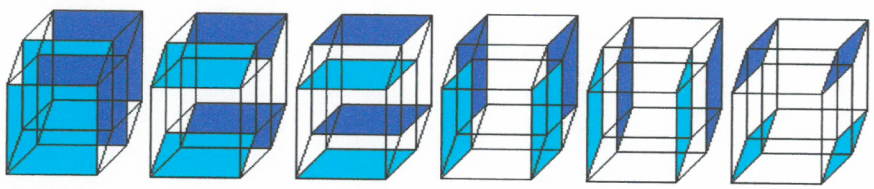
Ara que ja hem descrit els tres models tridimensionals d'hipercub podem procedir a estudiar-los. Com que els tres models anteriors representen la mateixa figura, hem de preveure que els 3 tindran les mateixes característiques geomètriques.
Centrem-nos primer en el model extrusionat.

→ Tenint en compte que aquest model d'hipercub l'hem obtingut movent un cub cap a la quarta dimensió, tindrà el doble de vèrtexs que un cub 3D. Per tant **té 16 vèrtexs**.

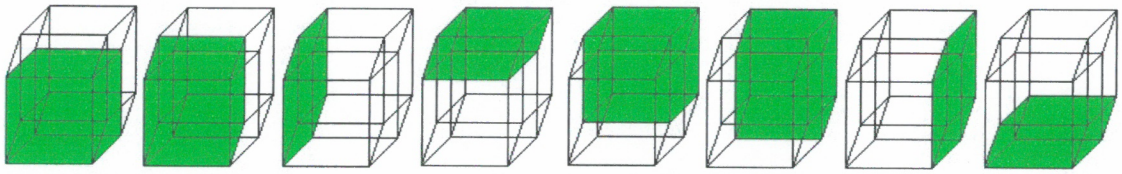


→ Fent la mateixa consideració tindrà les arestes corresponents a dos cubs. No obstant, hem de tenir en compte que els vèrtexs dels dos cubs estan units. Si cada cub té 12 arestes i hi ha 8 vèrtexs de cada cub per unir conclourem que **té 32 arestes**.

→ Pel que fa al nombre de cares, els dos cubs que formen l'hipercub en tenen 6 cada un. No obstant, a l'arrossegar el cub cap a la quarta dimensió, cada una de les 12 arestes d'aquest esdevindrà una cara quadrada, de manera que en total l'hipercub **tindrà 24 cares**.

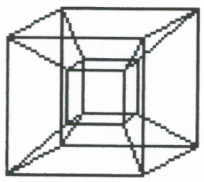


→ Per comptar el nombre de cubs cal tenir en compte el dos cubs limitants que constitueixen l'hipercub . A més cal considerar que en el procés d'arrossegar el cub, cada una de les seves 6 cares planes ha esdevingut un cub 3D. Sumant-los podem determinar que l'hipercub està **format per 8 cubs**.

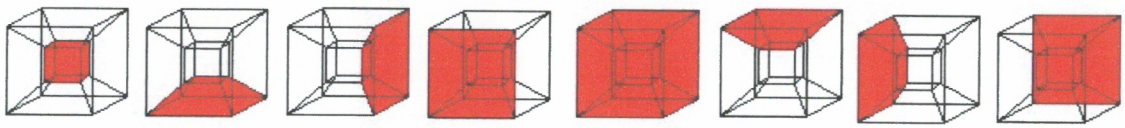


→Per últim només falta dir que està format per **1 hipercub**.

Ara que ja coneixem les característiques de l'hipercub podem estudiar el model de projecció central per intentar detectar les mateixes característiques:



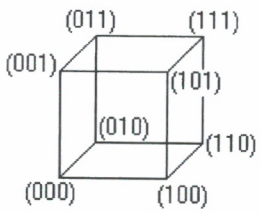
→ Té **16 vèrtexs** (8 del cub gran i 8 del cub petit).
→ Té **32 arestes** (12 de cada cub i 8 per unir els vèrtexs dels dos cubs).
→ Té **24 cares** (6 del cub gran, 6 del cub petit i 12 de laterals en forma trapezoïdal).
→ Té **8 cubs** tal com podem veure a continuació (el cub gran de fora, el petit de dins i els 6 laterals deformats).



→ Està format per **1 hipercub** 4D.

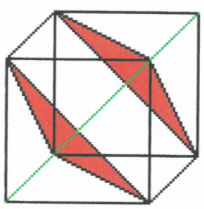
2.3.2. DESCRIPCIÓ MITJANÇANT COORDENADES

Si estudiem les coordenades que corresponen als vèrtexs d'un hipercub de costat 1 podrem fer observacions interessants. Comencem, però, amb el cas del cub 3D.
Si dibuixem un cub de costat 1 i retolem les coordenades que corresponen a cada un dels vèrtexs obtindrem el següent:

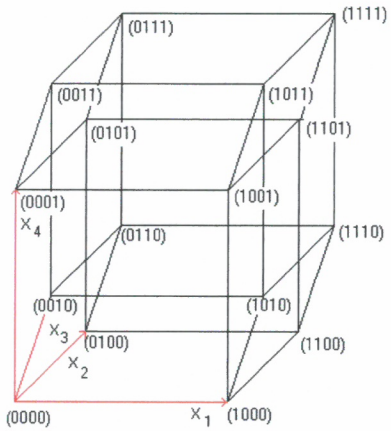


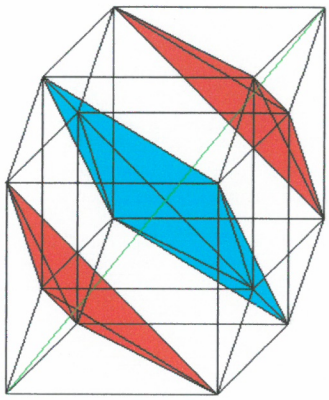
Si ens hi fixem podem observar com les agrupacions de 3 nombres que descriuen cada un dels vèrtexs són el conjunt de totes les variacions amb repetició que podem fer amb dos elements (0 i 1) agafats de 3 en 3.

Si sumem els nombres que apareixen a les coordenades dels diferents vèrtexs obtindrem valors compresos entre 0 i 3. Aquell vèrtex en el qual la suma hagi donat 3 i aquell en el que hagi donat 0 seran vèrtexs oposats en el cub (extrems de la diagonal verda). De la mateixa manera, si unim els vèrtexs en els que la suma hagi donat 1 i aquells en els que hagi donat 2 obtindrem dos triangles (ombrejats en vermell).



Fet això, repetim el procés però ara ho fem treballant amb un cub de 4 dimensions. Com és lògic, en aquest cas necessitarem 4 coordenades per descriure la posició dels seus vèrtexs amb la qual cosa obtindrem:





Un cop retolades les coordenades podem veure com les agrupacions de 4 nombres que constitueixen aquestes són el conjunt de variacions amb repetició que podem fer amb 2 elements agafats de 4 en 4. Si fem com abans i sumem els nombres de cada coordenada obtindrem valors compresos entre 0 i 4. El vèrtex on la suma ha donat 4 i aquell en què ha donat 0 tornen a ser escaires oposats (diagonal verda de la figura de la dreta). Si unim aquells punts en els quals la suma ha donat 1 i aquells en els que ha donat 3 obtindrem 2 tetraedres (ombrejats en vermell). Finalment, unint els punts on el resultat ha estat 2 aconseguirem un octaedre (en blau).
És important remarcar l'aparició d'aquestes figures tridimensionals dins l'hipercub perquè quan l'estudiem mitjançant seccions ens tornaran a aparèixer.

2.3.3. DESCRIPCIÓ D'ALTRES MAGNITUDS BÀSIQUES

2.3.3.1. Volum:

Una de les magnituds més fàcils de calcular per un cub de quatre dimensions és el seu volum. Comencem amb el cas més bàsic. En una dimensió, diem que un segment té longitud m si aquest pot ser cobert per m segments de longitud la unitat. En el cas de pla, en un quadrat de costat m hi podrem fer encaixar exactament m^2 quadrats unitaris (és a dir, que tinguin costat 1). Si seguim amb un cub de costat m, ens faran falta m^3 cubs unitaris per omplir-lo completament. Continuant amb aquest procés ens adonarem que per omplir un hipercub el costat del qual sigui m, ens faran falta just m^4 hipercubs unitaris. Així doncs queda clar que l'hipervolum d'un hipercub 4D es calcularà elevant a la quarta la longitud del seu costat:

$$V_4 = c^4$$

On:
V_4= volum de l'hipercub en unitats d'hipervolum
c= costat de l'hipercub

No ens és complex generalitzar aquest procés. Per a qualsevol n-cub (sent n un valor enter i positiu), el seu n-volum el calcularem segons:

$$V_n = c^n$$

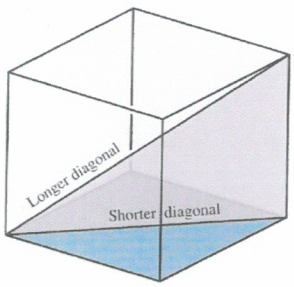
On:
V_n= volum de l'n-cub en unitats de n-volum
c= costat de l'n-cub

2.3.3.2. Diagonals:

Un altre element que podem estudiar d'un cub i, per tant, també de l'hipercub són les seves diagonals. Un cub 3D té dos tipus de diagonals: les que podem traçar unint els vèrtexs oposats d'una de les seves cares i aquelles que aconseguim si unim vèrtexs oposats de cares oposades, les quals anomenarem *diagonals grans*. Un hipercub de 4 dimensions té més tipus de diagonals però ara ens centrarem en la gran i intentarem cercar una fórmula per calcular la seva longitud. Comencem amb un quadrat bidimensional de costat c. La seva diagonal (d) la calcularem aplicant el teorema de Pitàgores i valdrà:

$$d^2 = c^2 + c^2 \;;\quad d = \sqrt{c^2 + c^2} \;;\quad d = \sqrt{2c^2} \;;\quad \boxed{d = c\sqrt{2}}$$

Passem ara al cas tridimensional. Per trobar la diagonal gran primer caldrà trobar la diagonal d'una de les seves cares. Si el cub segueix tenint costat c podem utilitzar la diagonal trobada a les línies anteriors i aplicar novament Pitàgores, tenint en compte que un catet serà la diagonal petita, l'altre valdrà c i la hipotenusa serà la diagonal gran. Per tant:



$$d^2 = d_{petita}^2 + c^2 \;;\quad d = \sqrt{d_{petita}^2 + c^2} \;;\quad d = \sqrt{\left(c\sqrt{2}\right)^2 + c^2}$$

$$d = \sqrt{2c^2 + c^2} \;;\quad d = \sqrt{3c^2} \;;\quad \boxed{d = c\sqrt{3}}$$

Un cop calculada la diagonal gran d'un cub 3D ja podem començar a entreveure un patró força clar. No obstant repetim el procés un altre cop. Tot i que l'hipercub tingui 4 dimensions , totes les arestes són perpendiculars entre elles i formen angle recte la qual cosa ens garanteix que podem utilitzar el teorema de Pitàgores. Tenint en compte que un catet serà la diagonal gran d'un cub 3D, l'altre valdrà c i la hipotenusa serà la diagonal gran de l'hipercub, podem escriure:

$$d^2 = d_{cub3D}^2 + c^2 \;;\quad d = \sqrt{d_{cub3D}^2 + c^2} \;;\quad d = \sqrt{\left(c\sqrt{3}\right)^2 + c^2} \;;\quad d = \sqrt{3c^2 + c^2} \;;\quad d = \sqrt{4c^2}$$

$$d = c\sqrt{4} \;;\quad \boxed{d = 2c}$$

De manera que un hipercub de costat c tindrà una diagonal gran que valdrà $2c$. Si ens hi fixem podrem observar que és un procés acumulatiu i que per calcular una diagonal d'un n-cub cal haver calculat prèviament la corresponent a l'(n-1)-cub. Al calcular una nova diagonal per un cub d'una dimensió superior tornem a aplicar el teorema de Pitàgores amb la qual cosa sempre queda dins l'arrel $n \cdot c^2$. La c^2 la traiem fora de l'arrel i per tant podem concloure que:

$$\boxed{d = c\sqrt{n}}$$

On:
d= longitud de la diagonal gran d'un n-cub
c= costat del cub
n= dimensió del cub

2.3.3.3. Variació de les magnituds de l'hipercub:

Per últim podem determinar com variarà la superfície de les seves cares, el volum dels seus cubs i l'hipervolum de l'hipercub quan el seu costat "c" es vegi incrementat en un factor "a".

→ Si el seu costat inicial era "c" i el multipliquem per "a", aquest augmentarà en un factor "a".

→ Considerem ara les seves cares planes. Aquestes inicialment tenien una superfície corresponent a "c^2". Si els seus costats esdevenen "ac", la superfície de les seves cares serà $(ac)^2$. Fet el quocient:

$$\frac{a^2c^2}{c^2} = a^2$$

La qual cosa significa que la superfície de les cares planes d'un hipercub augmentarà en un factor "a^2".

→Fixem-nos en els cubs que formen l'hipercub. Inicialment el volum d'aquests era "c^3". Si ara els costats esdevenen ac, el volum dels cubs serà $(ac)^3$.

$$\frac{a^3c^3}{c^3} = a^3$$

Després de multiplicar per als costats, el volum dels cubs que constitueixen l'hipercub es veurà multiplicat per "a^3".

→ Per últim fem atenció al què succeeix amb el volum de l'hipercub, després de multiplicar els costats per a. El volum inicial era c^4. Si ara els costats valen ac, el volum de l'hipercub esdevindrà $(ac)^4$.

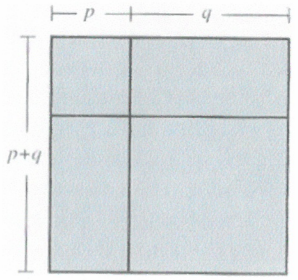
$$\frac{a^4c^4}{c^4} = a^4$$

De manera que l'hipervolum de l'hipercub prendrà un valor "a^4" vegades més gran que l'inicial.

2.4. Aplicació geomètrica del teorema dels binomis

Quan ens trobem amb un binomi elevat a una determinada potència podem expandir-lo per tenir-lo com una suma de diferents productes. Podem fer una interpretació geomètrica d'aquest procés mitjançant cubs de diferents dimensions. Tenint en compte que p+q=m, considerem el binomi següent:

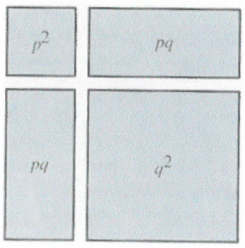
$$m^2 = (p+q)^2$$



La interpretació geomètrica d'aquest seria un quadrat de costat m. Fixem-nos en el què succeeix quan expandim el binomi (emprant els coeficients del triangle de Pascal):

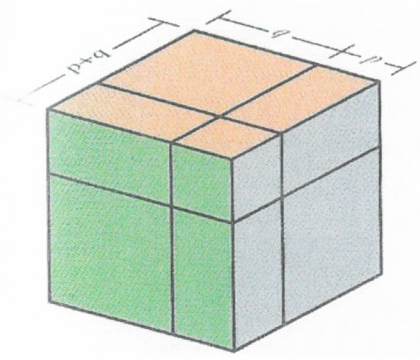
$$(p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$$

La qual cosa vol dir que si dividim el costat del quadrat (m) en dues parts p i q, el quadrat inicial passa a ser un conjunt de figures entre les quals hi ha un quadrat de costat p, dos rectangles de costats p i q i un últim quadrat de costat q. La suma de les àrees de tots aquests és l'àrea del quadrat inicial de costat "m".



Establim novament la igualtat d'abans p+q=m però ara considerem el binomi elevat a exponent 3:

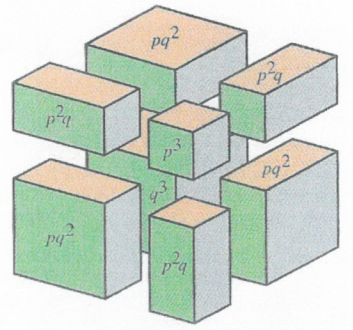
$$m^3 = (p+q)^3$$



La interpretació geomètrica d'aquest passa a ser ara un cub tridimensional de costat m dividit en dues parts: p i q.
Si fem com abans i expandim aquest binomi obtindrem el següent:

$$(p+q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3$$

De manera que el cub gran que teníem al començament queda dividit en un cub petit de costat p, un altre de costat q, 3 prismes de base quadrada p^2 i alçada q i 3 prismes més de base quadrada q^2 i alçada p:



La finalitat d'aquest procés és veure que un binomi com els anteriors elevat a la quarta potència posseeix també una interpretació geomètrica. Si tenim en compte aquesta expressió:

$$m^4 = (p+q)^4$$

El significat d'aquesta és un hipercub quadridimensional de costat m=(p+q). Si expandim el binomi obtindrem:

$$(p+q)^4 = p^4 + 4p^3q + 6p^2q^2 + 4pq^3 + q^4$$

De manera que l'hipercub inicial, si dividim els seus costats en dues parts p i q, passa a ser un conjunt de peces quadridimensionals. Estaria format per un hipercub petit de costat p, un altre hipercub de costat q, 4 hiperprismes de base cúbica p^3 i alçada q, 4 hiperprismes més de base cúbica q^3 i alçada p i finalment 6 nous objectes quadridimensionals que serien hiperprismes en els quals cada vèrtexs hi confluirien dues arestes de llargada p i dues de llargada q.
Amb aquest exemple podem veure com és possible fer la interpretació geomètrica d'un binomi elevat a una potència tot i que aquest no es pugui construir materialment en el nostre espai tridimensional.

2.5. Seccionament de l'hipercub

Una de les operacions que podem fer amb l'hipercub i que més informació ens proporciona sobre la geometria d'aquest és el seu seccionament. Si fem passar un cub 3D a través de l'univers de Planilàndia, els seus habitants 2D podran observar una successió de formes bidimensionals que apareixen sobtadament i canvien al llarg del temps. Aquestes seran les seccions bidimensionals del cub. De manera anàloga podem imaginar quines formes tridimensionals (seccions) apareixerien si un hipercub 4D travessés el nostre espai tridimensional.
Començarem estudiant les seccions planes d'un cub i després procedirem a deduir com serien les tridimensionals que correspondrien a un hipercub.

2.5.1. SECCIÓ DEL CUB

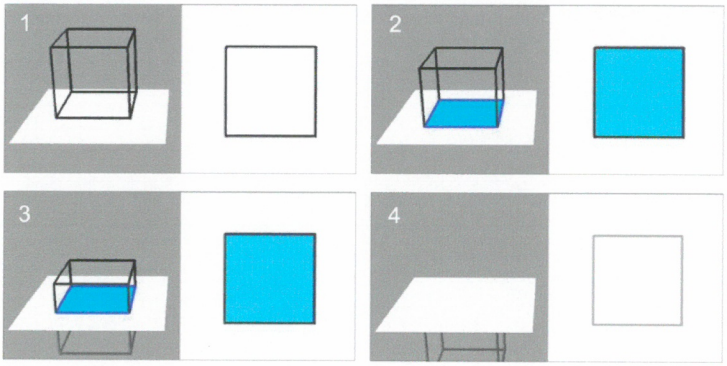
Alhora de seccionar un cub tenim diverses possibilitats. En concret el podem seccionar de tres maneres: començant per una de les seves cares planes, començant per una

aresta o bé començant per un dels seus vèrtexs. Estudiarem els tres casos separadament i ens ajudarem de material audiovisual per aclarir els processos.

2.5.1.1. Començant per una cara (2D)

Si fem que un cub de costat "c" travessi un espai bidimensional començant per una de les seves 6 cares observarem com en aquest hi apareix un quadrat de costat "c" durant uns instants. Quan el cub acabi de travessar completament, el quadrat desapareixerà, tal com podem veure en les captures següents.

>2.5. Secció del cub començant per una cara

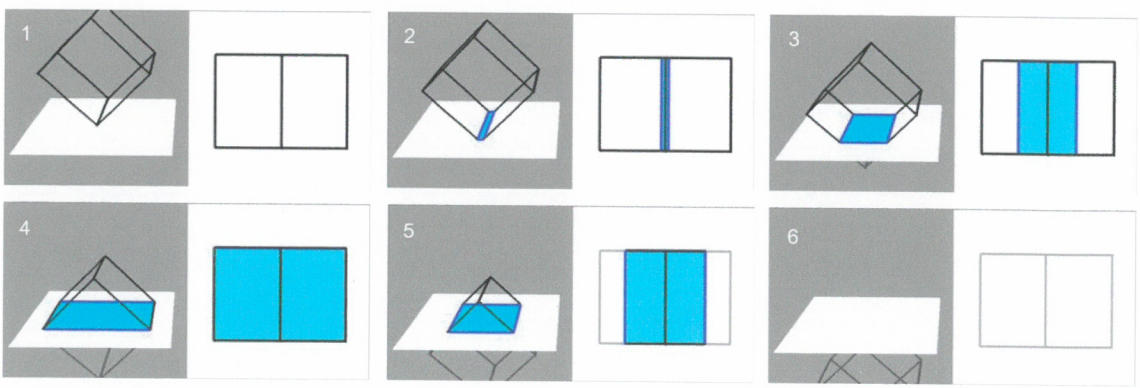


Cada captura està dividida en dues parts: la de l'esquerra mostra la situació en perspectiva mentre que la de la dreta ens dona una visió en planta, permetent-nos observar el procés des de dalt. Mentre el cub travessa l'espai 2D, la única secció que apareix és la de un quadrat (en blau) que dura uns quants instants fins que desapareix un cop el cub ha travessat del tot.

2.5.1.2. Començant per una aresta (1D)

Si ara fem que el cub travessi l'espai bidimensional començant per una de les seves arestes obtindrem unes seccions que canviaran al llarg del temps. Vegem la seqüència de captures:

>2.6. Secció del cub començant per una aresta



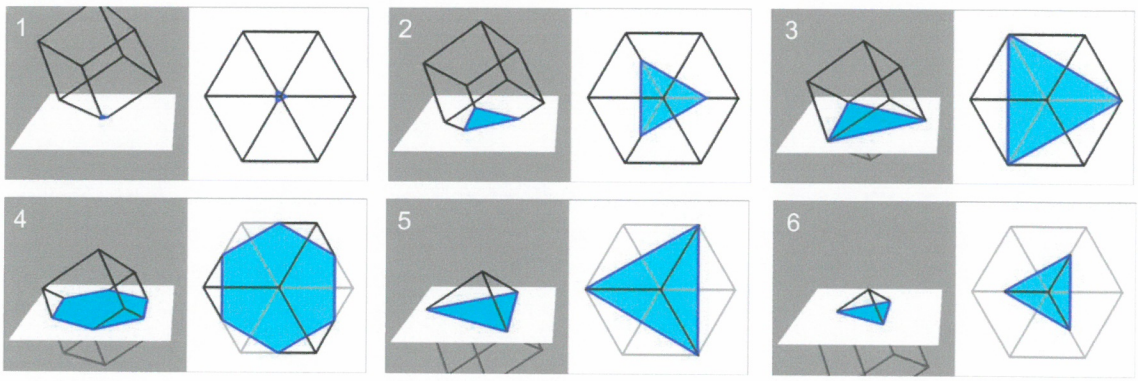
Observem com el primer contacte que té l'aresta amb l'espai 2D fa que en aquest aparegui una línia (fig. 2). A mesura que el cub es va endinsant, aquesta línia passa a

esdevenir un rectangle amb dos costats paral·lels de longitud fixa (la mida dels quals val el costat del cub "c") i dos altres costats que van creixent. Aquests assoleixen la longitud màxima just quan el cub és seccionat per la meitat en diagonal. En aquest instant, la longitud d'aquests costats és la mateixa que la de la diagonal d'una de les cares del cub ($c\sqrt{2}$) mentre que, com ja hem dit, els altres dos mantenen el tamany inicial corresponent a "c". A partir d'aquest punt el procés es desfarà; els costats de longitud variable s'aniran escurçant a mesura que el cub surti (fig. 5) fins que la secció esdevingui novament una línia i desaparegui (fig. 6).

2.5.1.3. Començant per un vèrtex (0D)

Aquesta és la secció més complexa d'imaginar i en ella apareixen diverses figures. Ajudem-nos també d'algunes captures:

>2.7. Secció del cub començant per un vèrtex



Quan el cub comença a tocar l'espai 2D apareix un punt en aquest que de seguida esdevé un triangle equilàter (fig. 2). A mesura que el cub s'endinsa la secció triangular va creixent. Quan una quarta part del cub ja ha travessat, la secció que obtenim és un triangle equilàter de dimensions màximes, els costats del qual tenen la mateixa mida que la diagonal d'una de les cares del cub ($c\sqrt{2}$). A partir d'aquest instant el triangle es trunca per les puntes de manera que quan el cub és seccionat exactament per la meitat, la figura que obtenim és un hexàgon regular (fig. 4). El motiu pel qual apareix aquest polígon regular és que a mig camí, l'espai 2D talla exactament igual cada una de les 6 cares del cub, de manera que el resultat és una figura amb 6 costats completament iguals. A partir d'aquest instant el procés té lloc a l'inrevés. L'hexàgon esdevé un altre triangle equilàter de costat $c\sqrt{2}$ (just en el moment en què ¾ parts del cub han travessat) que posteriorment anirà disminuint de mida (fig. 6) fins acabar en un punt i desaparèixer.

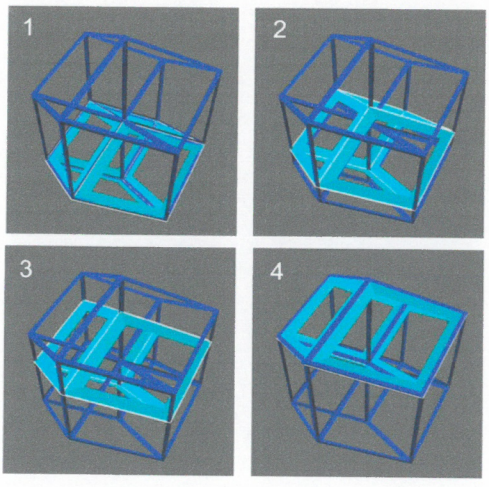
2.5.2. SECCIÓ DE L'HIPERCUB

Ara que ja hem descrit els processos de secció del cub podem procedir a descriure els que correspondran a la secció d'un hipercub de costat "c". En primer lloc cal fer una observació. Un cub de tres dimensions l'hem pogut seccionar començant de tres maneres diferents. És lògic pensar que un hipercub 4D el podrem seccionar de quatre maneres diferents. Aquestes són: començant per un dels seus cubs, començant per una de les seves cares, començant per una de les seves arestes i començant per un dels seus vèrtexs.
Les seccions del cub descrites anteriorment ens serviran a l'hora de treballar per analogia i també utilitzarem petits vídeos per aclarir els processos.

2.5.2.1. Començant per un cub (3D)

Abans d'estudiar què obtenim en seccionar un hipercub començant per un cub fem una observació. En la secció del cub, en primera instància l'hem tallat començant per una de les seves cares planes bidimensionals. El cub en sí tenia 3 dimensions i quan l'hem començant a tallar per una de les seves (n-1)-cares hem obtingut una successió de quadrats. Si raonem per analogia, quan tallem un hipercub 4D començant per una de les seves (n-1)-cares (és a dir 3-cares, sinònim de dir "cub"), obtindrem un resultat molt semblant però amb una dimensió més. És d'esperar, per tant, que en tallar-lo obtinguem un seguit de cubs tridimensionals. Vegem algunes captures d'aquest seccionament:

>2.8. Secció de l'hipercub començant per un cub

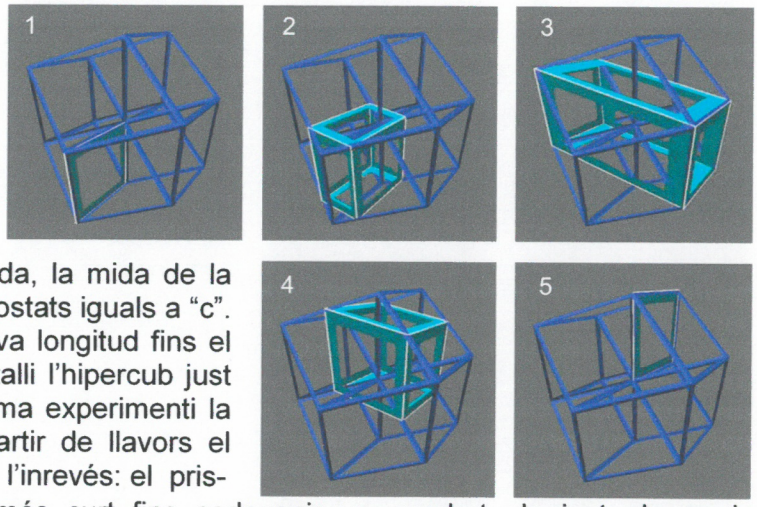


Efectivament, al seccionar un hipercub començant per una de les seves (n-1)-cares (cub), obtindrem un cub, la mida del qual romandrà inalterable al llarg del seccionament i que tindrà costats que valdran "c". Quan l'hipercub comenci a tallar l'espai 3D apareixerà el cub, que es mantindrà fins desaparèixer sobtadament en el moment en que acabi de travessar l'hipercub. El cub resultant tindrà els costats iguals als de l'hipercub original.
Els 16 vèrtexs de l'hipercub es distribuiran de la manera següent: en veurem 8 al començament, quan aparegui el cub i 8 al final, just abans de desaparèixer.

2.5.2.2. Començant per una cara (2D)

Ara seccionem l'hipercub començant per una de les seves cares bidimensionals (n-2). Raonant per analogia, obtindrem un resultat semblant al que hem aconseguit en seccionar el cub començant per una de les seves arestes però amb una dimensió més.

>2.9. Secció de l'hipercub començant per una cara

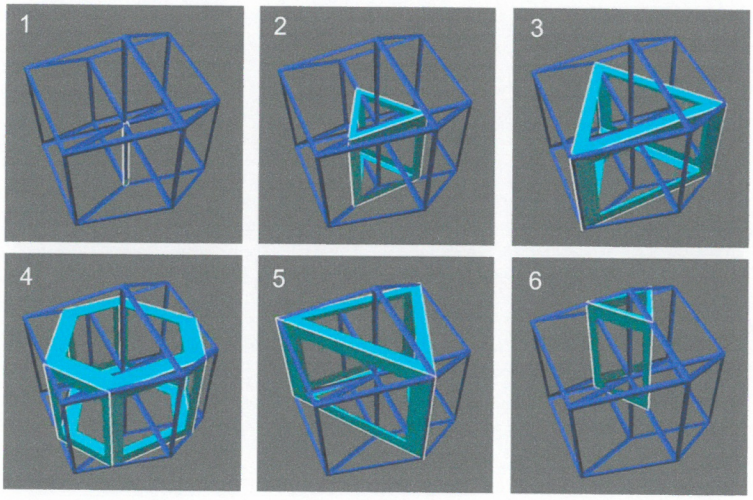


Quan l'hipercub entra en contacte amb l'espai 3D, apareix en aquest una secció que és un quadrat (fig.1). A mesura que l'hipercub s'endinsa en l'espai, el quadrat esdevé un prisma de base quadrada, la mida de la qual no variarà i que tindrà costats iguals a "c". El prisma augmentarà la seva longitud fins el moment en què l'espai 3D talli l'hipercub just per la meitat (fig.3) i el prisma experimenti la seva longitud màxima. A partir de llavors el procés es reproduirà però a l'inrevés: el prisma s'anirà fent cada cop més curt fins esdevenir un quadrat pla just abans de desaparèixer.Pel que fa als vèrtexs de l'hipercub, en aquest tipus de secció s'organitzen en 3 grups. Al començament de la secció, quan apareix un quadrat 2D, aquest conté 4 dels seus vèrtexs. A mig camí, en el moment que el prisma té la seva longitud màxima trobem 8 vèrtexs més de l'hipercub i els 4 que falten els hem de cercar a l'ultima secció quadrada que observem abans que l'hipercub surti de l'espai 3D i desaparegui.

2.5.2.3. Començant per una aresta (1D)

Les seccions de l'hipercub ara començaran per una de les seves arestes, que tenen dimensió (n-3). Així doncs haurem de cercar una relació analògica amb el procés de secció del cub començant per un dels seus vèrtexs.

>2.10. Secció de l'hipercub començant per una aresta



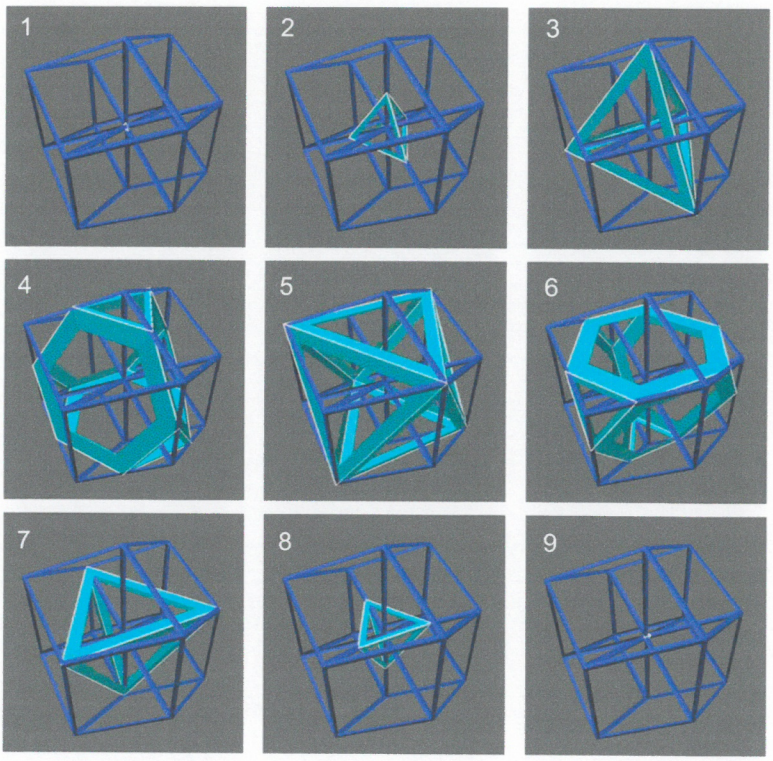
Tallant l'hipercub d'aquesta manera observem com en primer lloc apareix una línia unidimensional, la longitud de la qual val "c" (fig. 1). A mesura que l'hipercub penetra dins l'espai 3D aquesta esdevé un prisma de base triangular (fig. 2). L'altura d'aquest prisma és constant i també val "c". Just quan ¼ de l'hipercub ha travessat, observem com el prisma té la base de grandària màxima (fig. 3). A

partir d'aquest instant el prisma es veu truncat de manera que quan l'hipercub es troba submergit en l'espai 3D just per la meitat, la seva secció és un prisma de base hexagonal (fig. 4). A continuació experimentarem el mateix procés a l'inrevés. De la base hexagonal retornarem a la base triangular de grandària màxima (quan ¾ de l'hipercub hagin travessat) i a partir de llavors la base s'anirà fent petita fins acabar en una línia (fig. 6) i desaparèixer.
En aquest tipus de secció els 16 vèrtexs de l'hipercub es distribuiran en 4 grups: 2 a la línia que apareix al començament, 6 al primer prisma de base triangular, 6 al segon prisma de base triangular i 2 més a l'última línia que observem.
Si ens hi fixem podrem veure com les figures que apareixen mantenen molta similitud amb les que hem vist que apareixien en la secció del cub començant per un vèrtex però amb una dimensió menys.

2.5.2.4. Començant per un vèrtex (0D)

L'última manera que tenim de tallar un hipercub és fent-ho començant per un dels seus vèrtexs (de dimensió n-4). En aquest cas, però, no trobem analogia amb la secció del cub en la que basar-nos, doncs aquest no té prou dimensions (el cub no pot ser seccionat començant per un element de n-4 dimensions).

>2.11. Secció de l'hipercub començant per un vèrtex



Les seccions comencen amb un punt, el qual esdevé un tetraedre (fig. 2). Cada una de les 4 cares que conformen el tetraedre sorgeix de la intersecció de l'espai 3D amb 4 dels cubs que conformen l'hipercub. A mesura que aquest últim va travessant l'espai 3D, la mida del tetraedre va augmentant. Quan ¼ de l'hipercub ja ha travessat, el tetraedre experimenta la seva mida màxima (fig. 3) i els seus costats valen $c\sqrt{2}$ (corresponent a la llargada de la diagonal d'una de les seves cares planes). A partir de llavors les puntes del tetraedre esdevenen truncades de manera que quan 3/8 de l'hipercub han travessat l'espai 3D la seva secció és un sòlid semiregular constituït per 4 triangles equilàters i 4 hexàgons regulars (fig. 4), figura ja coneguda per Arquímedes. Seguim avançant i a l'instant que

l'hipercub ja ha travessat la meitat, la secció obtinguda és un octaedre regular, constituït per 8 triangles equilàters com a cares (fig. 5). A mig camí, l'espai tridimensional talla cada un dels 8 cubs de l'hipercub de manera exactament igual, donant lloc als 8 triangles equilàters. La longitud dels costats de l'octaedre és $c\sqrt{2}$. A partir d'aquest punt repetim el procés a la inversa. Quan 5/8 de l'hipercub han travessat tornem a trobar el sòlid semiregular (fig. 6) i quan ja ho han fet ¾ parts topem altre cop amb el tetraedre de mida màxima i costat $c\sqrt{2}$ (fig. 7). Aquest segueix fent-se petit fins esdevenir un punt i desaparèixer.
Quant a la distribució dels vèrtexs, els trobem repartits en 5 grups: 1 al punt inicial, 4 al tetraedre de mida màxima, 6 a l'octaedre del mig, 4 al tetraedre de tornada i 1 al punt final.

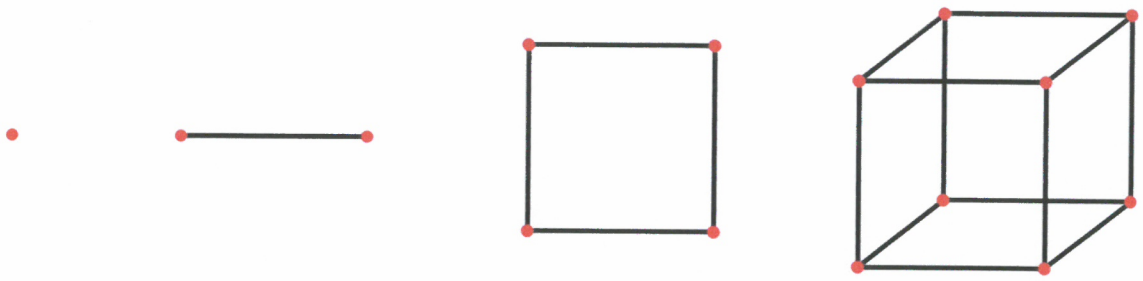
2.6. Càlcul del nombre de r-cares d'un n-cub

2.6.1. OBTENCIÓ DE LA FÓRMULA GENERAL

Un cop estudiat el cub i l'hipercub podem crear una taula en la que apareguin el nombre de figures de cada dimensió que constitueixen el punt, el segment, el quadrat, el cub i l'hipercub:

Figura estudiada	núm. vèrtexs	núm. arestes	núm. cares	núm. cubs	núm. hipercubs
punt (0D)	1	0	0	0	0
segment (1D)	2	1	0	0	0
quadrat (2D)	4	4	1	0	0
cub (3D)	8	12	6	1	0
hipercub (4D)	16	32	24	8	1

Fins ara hem aconseguit aquestes dades parant atenció a la geometria de les figures i comptant quins elements les constituïen. No obstant, quan ens referim a cubs de dimensions superiors, el càlcul esdevé complex i en molts casos les projeccions no ens permeten treballar amb facilitat. És per això que podem intentar buscar una fórmula que ens permeti trobar el nombre d'elements de cada dimensió (que anomenarem r-cares) que té un cub de n dimensions (n-cub).
En primer lloc comencem fixant-nos en el procés emprat per obtenir un cub tridimensional. Partint d'un punt, desplacem aquest en una determinada direcció a l'espai per obtenir un segment, el qual està limitat per dos punts. El segment obtingut el desplacem en una direcció perpendicular a la inicial a fi d'obtenir un quadrat pla, el qual té 4 vèrtexs. Per últim desplacem aquest pla en un tercer sentit perpendicular als dos anteriors amb la qual cosa obtenim un cub de tres dimensions i que té un total de 8 vèrtexs.
Notem que cada cop que desplacem una figura en una nova direcció (dimensió), la figura que obtenim multiplica per dos el nombre de vèrtexs que tenia la seva predecessora.



punt (0D): 1 vèrtex

línia (1D): 2 vèrtexs

quadrat (2D): 4 vèrtexs

cub (3D): 8 vèrtexs

Així doncs podem deduir una fórmula simple que ens permetrà determinar el nombre de vèrtexs d'un cub de n dimensions. El nombre de vèrtexs el simbolitzarem amb la expressió X_0:

$$X_0 = 2^n$$

Procedim ara a deduir quina expressió ens permetrà calcular el nombre d'arestes d'un cub de n dimensions. Observem què succeeix als vèrtexs de les figures de dalt:
El punt, que té 0 dimensions, no té cap aresta que sorgeixi d'ell. En el segment, de 1 dimensió, de cada vèrtex sorgeix una aresta. En el cas del quadrat bidimensional veiem que de cada vèrtex en sorgeixen dues arestes i en el cas del cub de 3 dimensions, són 3 el nombre d'arestes que conflueixen en cada vèrtex. D'aquesta observació se'n desprèn que el nombre d'arestes que sorgiran d'un dels vèrtexs d'un cub de n dimensions serà n (una aresta per cada una de les dimensions en les que s'estén el cub). A primera impressió, doncs, podríem caure en l'error de considerar que el nombre d'arestes (X_1) que tindrà un cub de n dimensions serà el nombre de vèrtexs multiplicat pel nombre d'arestes que conflueixen a cada un d'aquests:

$$*X_1 = X_0 \cdot n$$

No obstant això, quan ens fixem detingudament en les figures de dalt veiem que cada vèrtex té dos extrems i, per tant, que una mateixa aresta correspon a dos vèrtexs. Així doncs, la fórmula que hem presentat és incorrecta ja que hem comptat cada aresta dues vegades. Corregim aquest error dividint l'expressió de dalt per dos:

$$X_1 = \frac{X_0 \cdot n}{2}$$

Avancem i ens fixem ara en el nombre de cares (X_2) del cub. Observem que a cada aresta hi conflueixen dues cares. A l'hipercub, l'anàleg del cub però en quatre dimensions, el nombre de cares bidimensionals que van a parar a una mateixa aresta és de 3. En general podem imaginar que en un cub de n dimensions confluiran en una mateixa aresta, (n-1) cares planes. Si ens fixem en el cas del cub tridimensional podem justificar aquesta observació. Escollim una de les arestes del cub i ens fixem que hi van a parar dues cares planes. Tenint en compte que estem davant un objecte de 3 dimensions i que l'aresta en sí mateixa ja ocupa una dimensió, les cares planes

provindran de les dimensions restants; i per tant, en el cas del cub 3D, només n'hi confluiran dues.
Fem, per tant, una primera conjectura de la fórmula:

$$*X_2 = X_1 \cdot (n-1)$$

Però tal com ens ha passat en el cas de la fórmula de les arestes, aquesta fórmula és incorrecta. Una cara bidimensional està limitada per 4 arestes, la qual cosa vol dir que amb la fórmula de sobre comptem cada cara 4 vegades. Solucionem el problema dividint l'expressió per 4:

$$X_2 = \frac{X_1 \cdot (n-1)}{4}$$

Cerquem ara una fórmula pel nombre de sòlids tridimensionals (X_3) d'un cub n-dimensional. Evidentment aquesta fórmula no tindrà cap mena d'utilitat en l'estudi de cubs de 3 dimensions però en prendrà més a l'hora d'estudiar cubs de dimensions superiors. Quan estudiem la figura de l'hipercub de 4 dimensions, observem que a cada una de les seves cares bidimensionals hi conflueixen 2 cubs. Altre cop podem utilitzar un raonament simple per corroborar aquesta observació. Tenint en compte que parlem d'un cub de 4 dimensions i que una cara plana "ocupa" dues dimensions, només romanen dues direccions (dimensions) de les quals poden provenir les cares cúbiques. Així doncs, per un cub de n dimensions, a cada una de les seves cares planes (2D) hi confluiran n-2 sòlids cúbics. Proposem una primera fórmula:

$$*X_3 = X_2 \cdot (n-2)$$

Altre cop errem, ja que hem de tenir en compte que cada cub té 6 cares i que, per tant, amb la fórmula anterior hem comptat cada sòlid tridimensional 6 vegades. Corregim i obtenim:

$$X_3 = \frac{X_2 \cdot (n-2)}{6}$$

Arribats a aquest punt recuperem totes les fórmules obtingudes en el procés deductiu:

Figura estudiada	Fórmula
Vèrtexs (0D)	$X_0 = 2^n$
Arestes (1D)	$X_1 = \frac{X_0 \cdot n}{2}$
Cares (2D)	$X_2 = \frac{X_1 \cdot (n-1)}{4}$

Sòlids (3D)	$X_3 = \frac{X_2 \cdot (n-2)}{6}$

Abans de procedir a deduir una fórmula general fem el raonament anterior per a qualsevol cas. Desitgem saber el nombre de cares de r dimensions que hi ha en un cub de n dimensions. En primer lloc farà falta saber el nombre de cares de (r-1) dimensions que hi ha en aquell n-cub (X_{r-1}). Un cop tenim el nombre de cares de dimensió una unitat inferior que té l'n-cub estudiat determinem que el nombre de cares de r-dimensions que confluiran en una de les cares de (r-1) dimensions serà el nombre total de dimensions que té el cub (n) menys el nombre de dimensions que ja ocupa cada una de les cares de (r-1) dimensions. Per tant proposem:

$$*X_r = X_{r-1} \cdot [n-(r-1)]$$

nombre de cares de (r-1) dimensions que té el cub estudiat

nombre de cares de r dimensions que confluiexen en cada una de les cares de (r-1) dimensions. El nombre de r-cares que confluiexen en una (r-1)-cara és el nombre total de dimensions del cub (n) menys el nombre de dimensions ja ocupades per les (r-1)-cares.

Caiem en el mateix error d'abans. En cada una de les cares de r dimensions hi confluiexen més d'una cara de (r-1) dimensions, la qual cosa vol dir que hem calculat més r-cares del compte. El nombre de cares de (r-1) dimensions que van a parar a una cara de r dimensions és dues vegades el valor de la dimensió de la cara que estudiem, es a dir, r. Amb la fórmula de dalt cada r-cara l'hem comptat 2r vegades de més, per tant la fórmula correcta serà:

$$X_r = \frac{X_{r-1} \cdot [n-(r-1)]}{2r}$$

$$X_r = \frac{X_{r-1} \cdot [n-r+1]}{2r}$$

D'aquesta manera disposem d'una fórmula que ens permet calcular el nombre de r-cares que trobem en un cub de n dimensions. No obstant això veiem que la fórmula es troba en funció de tres variables: n, r i X_{r-1}. Desenvolupant la fórmula podrem fer que aquesta depengui únicament de dues variables: n i r.

Com ja hem vist, la fórmula obtinguda és acumulativa, la qual cosa significa que per obtenir el nombre de r-cares cal recórrer al resultat obtingut anteriorment en aplicar la fórmula per (r-1), (r-2)... i així successivament fins que r=1.
Recuperem les fórmules d'abans:

- $X_0 = 2^n$

- $X_1 = \frac{X_0 \cdot n}{2}$
- $X_2 = \frac{X_1 \cdot (n-1)}{4}$
- $X_3 = \frac{X_2 \cdot (n-2)}{6}$

En primer lloc expressarem totes les fórmules en funció de X_0. Comencem amb la fórmula de X_2:

$$X_2 = \frac{\frac{X_0 \cdot n}{2}(n-1)}{4}$$

$$X_2 = \frac{X_0 \cdot n \cdot (n-1)}{8}$$

Seguim i substituïm X_2 a la fórmula de X_3:

$$X_3 = \frac{\frac{X_0 \cdot n \cdot (n-1)}{8} \cdot (n-2)}{6}$$

$$X_3 = \frac{X_0 \cdot n \cdot (n-1)(n-2)}{48}$$

De manera que ara tenim 4 fórmules, la primera únicament en funció de n i les altres en funció de n i X_0:

- $X_0 = 2^n$
- $X_1 = \frac{X_0 \cdot n}{2}$
- $X_2 = \frac{X_0 \cdot n \cdot (n-1)}{8}$
- $X_3 = \frac{X_0 \cdot n \cdot (n-1)(n-2)}{48}$

Arribats a aquest punt fixem-nos d'on provenen els denominadors de les fórmules de dalt. En la fórmula general que hem trobat a les línies anteriors en el denominador hi

apareixia l'expressió 2r. En la fórmula de X_1 apareix al denominador el nombre 2, que correspon a la definició donada per la fórmula general (2r= 2·1=2).
Parem atenció al cas de X_2. Al denominador apareix el nombre 8. Hem de tenir en compte que aquesta fórmula l'hem obtingut després de substituir l'X_1 que ens apareixia inicialment de manera que quedés només en funció de X_0. Així doncs, podem escriure:

$$8=[2r]\left[2(r-1)\right]=[2\cdot 2][2\cdot 1]$$

El factor 2·1 apareix en el moment en que substituïm X_1 per la seva corresponent fórmula de manera que només quedi en funció de X_0.

Fem el mateix raonament per la fórmula de X_3. En aquest cas el denominador és 48. Tenint en compte que en aquesta fórmula l'X_2 que ens apareixia inicialment ha estat substituït per la fórmula corresponent (en la que, alhora, X_1 també ha estat substituït per la seva fórmula tal com ja s'ha explicat) observem que:

$$48=[2r]\left[2(r-1)\right]\left[2(r-2)\right]=[2\cdot 3][2\cdot 2][2\cdot 1]$$

Feta aquesta observació podem manipular les expressions de la manera següent:

r=2 $$8=[2r]\left[2(r-1)\right]=2^2\left[r(r-1)\right]=2^2\left[2(2-1)\right]=2^2\cdot 2\cdot 1=2^2\cdot 2!$$

r=3 $$48=[2r]\left[2(r-1)\right]\left[2(r-2)\right]=2^3\left[r(r-1)(r-2)\right]=2^3\left[3(3-1)(3-2)\right]=2^3\cdot 3\cdot 2\cdot 1=2^3\cdot 3!$$

La qual cosa ens permet expressar el denominador d'una manera diferent. En general aquest serà:

$$2^r\cdot r!$$

Procedim a expressar els denominadors de les expressions de dalt d'aquesta manera:

- $X_0=2^n$
- $X_1=\dfrac{X_0\cdot n}{2^1\cdot 1!}$
- $X_2=\dfrac{X_0\cdot n\cdot(n-1)}{2^2\cdot 2!}$
- $X_3=\dfrac{X_0\cdot n\cdot(n-1)(n-2)}{2^3\cdot 3!}$

Fixem-nos ara en el que hi ha al numerador a partir de la fórmula de X_1. Observem com apareix sempre el terme X_0, multiplicant-se a altres valors. A la fórmula de X_1; X_0

multiplica a n. En la fórmula de X_2, veiem com al numerador hi ha $X_0 \cdot n \cdot (n-1)$. Pel que fa a la fórmula de X_3; X_0 es troba multiplicant a $n \cdot (n-1)(n-2)$. D'aquestes observacions podem deduir que, en general al numerador hi apareixerà:

$$n(n-1)(n-2)...[n-(r-1)]$$

$$n(n-1)(n-2)...[n-r+1]$$

Arribats a aquest punt ja disposem de suficient informació per conjecturar una fórmula general. Recuperant el que havíem dit anteriorment sobre el que apareixia al denominador concloem en:

$$X_r = \frac{X_0 \cdot n \cdot (n-1)(n-2)...(n-r+1)}{2^r \cdot r!}$$

Substituïm X_0 per la seva corresponent fórmula:

$$X_r = \frac{2^n \cdot n \cdot (n-1)(n-2)...(n-r+1)}{2^r \cdot r!}$$

Agrupem les potències de base 2:

$$X_r = \frac{n \cdot (n-1)(n-2)...(n-r+1) \cdot 2^{n-r}}{r!} \qquad r \leq n$$

De manera que ja disposem d'una fórmula que ens permet calcular el nombre de cares de r dimensions que té un cub de n dimensions. Evidentment cal indicar que aquesta fórmula només serà aplicable quan r sigui més petit o igual al valor de n (ja que un cub n-dimensionals no té r-cares de dimensió superior a n).
No obstant això aquesta fórmula és difícil de processar automàticament fent ús d'un ordinador degut a la sèrie que apareix al numerador i que l'ordinador no sap interpretar. Així, busquem una fórmula compacta i fàcilment computable.
Al numerador hi apareixerà la sèrie següent: $n \cdot (n-1)(n-2)...(n-r+1)$
Si en lloc d'aquesta sèrie posem l'expressió $n!$ veiem com no obtenim el mateix resultat ja que apareixen $(n-r)!$ valors multiplicats al numerador que abans no hi eren.
Vegem-ho amb un exemple:
Si n=7 i r=5, la sèrie que apareixerà serà la següent: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$
I en canvi, si posem al numerador $n!$ apareix: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
Veiem com s'afegeixen multiplicant els termes $2 \cdot 1$, els quals corresponen a $(n-r)!$.
No obstant aquest problema el podem resoldre fàcilment simplement afegint al denominador $(n-r)!$, la qual cosa ens eliminarà els termes no desitjats que apareixen al numerador quan posem $n!$. Finalment obtenim:

$$X_r = \frac{n! \cdot 2^{n-r}}{(n-r)!\,r!} \qquad r \leq n$$

on:
n és el nombre de dimensions del cub
r és el nombre de dimensions de la figura estudiada del cub

2.6.2. COMPUTACIÓ DELS RESULTATS

Amb la fórmula trobada en l'apartat 2.6.1. podem calcular amb certa facilitat el nombre de r-cares que té un cub de n dimensions. La tasca esdevé ràpida i fàcil d'efectuar si ens ajudem d'un full de càlcul amb el formulari adequat com el que es mostra a continuació.

>2.12. Taula de les r-cares d'un n-cub

dimensió del n-cub	nombre de cares de r dimensions										
	r=0	r=1	r=2	r=3	r=4	r=5	r=6	r=7	r=8	r=9	r=10
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	4	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	8	12	6	1	0	0	0	0	0	0	0
4	16	32	24	8	1	0	0	0	0	0	0
5	32	80	80	40	10	1	0	0	0	0	0
6	64	192	240	160	60	12	1	0	0	0	0
7	128	448	672	560	280	84	14	1	0	0	0
8	256	1024	1792	1792	1120	448	112	16	1	0	0
9	512	2304	4608	5376	4032	2016	672	144	18	1	0
10	1024	5120	11520	15360	13440	8064	3360	960	180	20	1

A l'esquerra de la taula hi ha el nombre de dimensions que té el cub estudiat i a les columnes de la seva dreta trobem el nombre de cares de cada dimensió que aquest té. Com és lògic, un cub de n dimensions només pot estar format per r-cares, la r de les quals sigui igual o menor a n.

2.6.3. RELACIÓ AMB L'EXPANSIÓ D'UN BINOMI

Feta la deducció de l'apartat anterior podem procedir a fer una observació curiosa. En primer lloc, però, cal recordar la fórmula emprada per a calcular el nombre de combinacions que es poden fer amb n elements agafats en grups de r elements. És la següent:

$$ {}_rC_n = \frac{n!}{r!(n-r)!} $$

Si parem atenció veurem que en l'expressió trobada per calcular el nombre de r-cares d'un cub apareix justament aquesta fórmula de combinatòria. Si substituïm obtenim:

$$ X_r = \frac{n! \cdot 2^{n-r}}{(n-r)!r!} \qquad r \leq n $$

$$ X_r = {}_rC_n \cdot 2^{n-r} $$

Aquesta observació ens permetrà lligar la nostra fórmula amb l'expansió del binomi de Newton. Vegem un binomi elevat a una determinada potència, per exemple:

$$ (a+b)^4 $$

Que és equivalent a:

$$ (a+b)(a+b)(a+b)(a+b) $$

Si volem calcular quin valor té aquesta expressió caldrà multiplicar tots els elements per tots i sumar el valors obtinguts. Per facilitar el procés ho farem d'una manera ordenada, agafant un element de cada un dels parèntesis.
Comencem prenent una "a" de cada un d'ells, amb la qual cosa aconseguim:

$$ a^4 $$

Només hi ha una sola manera d'agafar quatre "a", i és prenent la "a" de cada un dels parèntesis.
Seguidament prenem tres "a" i una "b" i obtenim aquesta expressió:

$$ a^3 b $$

Però aquest cas és diferent de l'anterior, doncs tenim diverses maneres d'agafar a i b. Podem prendre la "b" del primer parèntesis i les "a" de la resta, ho podem fer amb el segon, amb el tercer i el quart. Per calcular de quantes maneres diferents podem aconseguir l'expressió anterior hem de calcular el nombre de combinacions que es poden fer amb 4 elements agafats d'un en un:

$$\binom{4}{1} = {}_1C_4 = \frac{4!}{1!(4-1)!} = 4$$

Així doncs tenim que hi ha quatre maneres d'aconseguir a^3b, la qual cosa implicarà comptar aquesta quatre vegades (multiplicar-la per quatre).
Farem el mateix prenent dues "a" i dues "b" i en aquest cas també tindrem diverses opcions. Per calcular el nombre de maneres que tenim d'agafar a^2b^2 emprarem la fórmula de les combinacions, amb quatre elements agafats de dos en dos:

$$\binom{4}{2} = {}_2C_4 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$$

Per tant hi ha 6 maneres diferents d'agafar a^2b^2.
Procedim a fer el mateix però ara amb l'expressió a^1b^3. Apliquem la fórmula d'abans, ara fent grups de tres en tres:

$$\binom{4}{3} = {}_3C_4 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$$

Caldrà doncs multiplicar a^1b^3 per 4.
Per últim prendrem totes les "b" i cap "a". Òbviament només hi ha una manera d'agafar totes les "b".
Fets aquests càlculs conclourem que:

$$(a+b)^4 = 1\cdot a^4b^0 + 4\cdot a^3b^1 + 6\cdot a^2b^2 + 4\cdot a^1b^3 + 1\cdot a^0b^4$$

Aquest procés de combinatòria és llarg de fer i està sintetitzat en el triangle de Pascal en el que apareixen els nombres combinatoris. A continuació presentem les cinc primeres files:

$$\binom{0}{0}$$

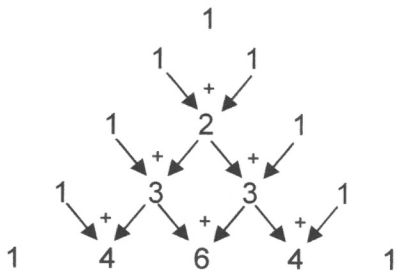
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

Un cop calculats aquests nombres obtenim un triangle com el següent:



Els coeficients, a més de poder ser calculats mitjançant la combinatòria, els podem obtenir ràpidament sumant els dos nombres de la fila superior i col·locant el resultat entre mig d'ells a sota.

Arribats a aquest punt, i emprant la fórmula trobada anteriorment, calculem el nombre de cares de 0, 1, 2, 3 i 4 dimensions que tindrà un cub de 4 dimensions:

$$X_r = {}_rC_n \cdot 2^{n-r}$$

r=0 $X_0 = {}_0C_4 \cdot 2^{4-0} = 1 \cdot 2^4 = 16$

r=1 $X_1 = {}_1C_4 \cdot 2^{4-1} = 4 \cdot 2^3 = 32$

r=2 $X_2 = {}_2C_4 \cdot 2^{4-2} = 6 \cdot 2^2 = 24$

r=3 $X_3 = {}_3C_4 \cdot 2^{4-3} = 4 \cdot 2^1 = 8$

r=4 $X_4 = {}_4C_4 \cdot 2^{4-4} = 1 \cdot 2^0 = 1$

Observem que per calcular el nombre de 0-cares (vèrtexs) multipliquem 1 per 2^4. Per fer-ho amb el nombre de 1-cares (arestes) multipliquem 4 per 2^3. Per obtenir el nombre de 2-cares fem el producte de 6 per 2^2; per les 3-cares multipliquem 4 per 2 i finalment per calcular les 4-cares efectuem 1 per 1.
Fixem-nos en que 1, 4, 6, 4, i 1 són els nombres que apareixen al triangle de Pascal a la cinquena fila, i que a continuació d'aquests hi ha un 2 elevat a un nombre que descendeix des de 4 fins a 0.
Així doncs podem concloure en que una expressió de tipus $(2+1)^n$, un cop expandida, ens calcularà el nombre de r-cares que tindrà un cub de n dimensions; sent r un valor comprès entre 0 i n. Comprovem-ho amb el cas del cub de 4 dimensions (n=4):

$$(2+1)^4 = 1 \cdot 2^4 \cdot 1^0 + 4 \cdot 2^3 \cdot 1^1 + 6 \cdot 2^2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 2^1 \cdot 1^3 + 1 \cdot 2^0 \cdot 1^4 = 16 + 32 + 24 + 8 + 1$$

Segons l'expansió del binomi el cub de 4 dimensions està format per 16 vèrtexs, 32 arestes, 24 cares planes, 8 cubs i un cub de 4 dimensions; resultats que concorden amb les dades que ja teníem.
Generalitzant podem determinar definitivament que:

Expandint el binomi $(2+1)^n$, sent n un nombre enter i positiu, obtindrem el nombre de cares des de 0 fins a n dimensions que té un cub de n dimensions.

Procedim a calcular algunes expansions i a comprovar que coincideixen amb els resultats de la taula de l'apartat anterior, els quals estan calculats mitjançant la fórmula:

$$(2+1)^0 = 1$$

$$(2+1)^1 = 1\cdot 2 + 1\cdot 1 = 2+1$$

$$(2+1)^2 = 1\cdot 2^2 + 2\cdot 2 + 1\cdot 1 = 4+4+1$$

$$(2+1)^3 = 1\cdot 2^3 + 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1\cdot 1 = 8+12+6+1$$

$$(2+1)^4 = 1\cdot 2^4 + 4\cdot 2^3 + 6\cdot 2^2 + 4\cdot 2 + 1\cdot 1 = 16+32+24+8+1$$

$$(2+1)^5 = 1\cdot 2^5 + 5\cdot 2^4 + 10\cdot 2^3 + 10\cdot 2^2 + 5\cdot 2 + 1\cdot 1 = 32+80+80+40+10+1$$

$$(2+1)^6 = 1\cdot 2^6 + 6\cdot 2^5 + 15\cdot 2^4 + 20\cdot 2^3 + 15\cdot 2^2 + 6\cdot 2 + 1\cdot 1 = 64+192+240+160+60+12+1$$

$$(2+1)^7 = 1\cdot 2^7 + 7\cdot 2^6 + 21\cdot 2^5 + 35\cdot 2^4 + 35\cdot 2^3 + 21\cdot 2^2 + 7\cdot 2 + 1\cdot 1 = 128+448+672+560+280+84+14+1$$

3.1. Introducció al concepte de cercle, esfera i hiperesfera

El mot hiperesfera en aquest treball serà utilitzat com a sinònim de "esfera de 4 dimensions". Per comprendre què significa parlar d'una esfera de 4 dimensions ens referirem primer al cas de dues dimensions (circumferència) i al cas de tres (esfera).

→ Una *circumferència* és una forma geomètrica formada pel conjunt de punts d'un pla que es troben a distància constant d'un punt donat anomenat centre. La distància del centre a un d'aquests punts s'anomena radi.
Tenint en compte aquesta definició, podem trobar fàcilment l'equació d'una circumferència. En el primer apartat d'aquest treball hem presentat la fórmula utilitzada per calcular la distància entre dos punts en l'espai bidimensional. Si volem que el cercle tingui centre al punt (a,b) i que el seu radi sigui r només cal que substituïm a la fórmula i obtindrem:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

equació de la circumferència: $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$

→ Una *esfera*, en canvi, és un sòlid limitat per una superfície tots els punts de la qual equidisten d'un punt anomenat centre. Per trobar la fórmula d'una esfera utilitzarem la fórmula per calcular distàncies en l'espai tridimensional presentada també al primer apartat i segons la qual:

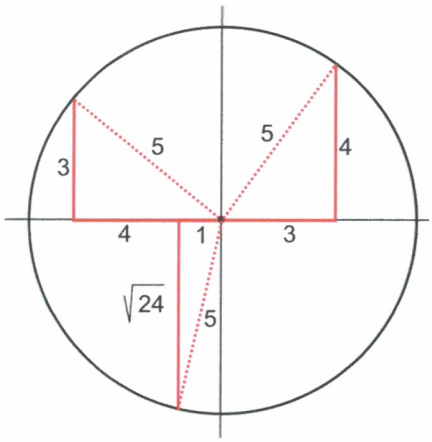
$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Volem que el centre de l'esfera tingui coordenades (a,b,c) i que el radi d'aquesta valgui r, de manera que ens queda:

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

equació de l'esfera: $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$

Ara que ja hem vist per sobre les definicions del cercle (esfera 2D) i de l'esfera 3D podem començar a pensar en quines seran les característiques d'una esfera de 4 dimensions o hiperesfera.
→ Una ***hiperesfera*** és una figura de 4 dimensions formada per la regió de l'espai 4D que està limitada pel conjunt de punts que equidisten a un punt donat o centre.
En realitat el concepte d'esfera i hiperesfera són molt semblants, l'únic que s'ha de tenir en compte és que en una hiperesfera 4D ens podrem moure en 4 dimensions diferents per anar a trobar un punt que estigui a distància r del centre (radi).



Vegem-ho amb un exemple i intentem primer construir una esfera de radi 5 cm; la qual cosa vol dir que hem de marcar tots els punts de l'espai tridimensional a distància 5 del centre. Podem moure'ns 5 cm en horitzontal i trobarem un punt. També podem avançar recte 4 cm i ascendir-ne 3 o bé avançar-ne 3 i ascendir-ne 4 o fins i tot avançar-ne 1 i descendir una distància $\sqrt{24}$. El nombre de combinacions possible és infinita i l'esfera estarà limitada per tots els punts que compleixin la condició d'estar a 5 cm. del centre.

Podem fer aquest mateix procés a l'hora d'imaginar com hauria de ser una hiperesfera, però hem de tenir en compte que ara existeixen 4 direccions en les que ens podem dirigir. En primer lloc, si el radi són 5 cm., seran punts de la hiperesfera tots aquells de l'espai tridimensional situats a 5 cm del centre. No obstant també ens podem moure en direcció "ana" i "kata" de manera que ens podem allunyar 3 cm del centre en qualsevol direcció, girar 90º i moure'ns 4 cm en direcció "ana" per trobar un punt de la hiperesfera. També podem allunyar-nos 4 cm del centre i llavors descendir 3 cm en direcció "kata" o bé també podem desplaçar-nos directament 5 cm en direcció "ana" o "kata" per trobar punts de la hiperesfera. Tota aquesta munió de punts constituiran la hipersuperfície de la hiperesfera de radi 5.
Feta aquesta reflexió tampoc és complicat trobar l'equació que ens representi una hiperesfera. La seva definició diu que és aquell espai 4D limitat per punts que es troben a distància r del centre. Recordem la fórmula presentada al primer apartat del treball per calcular distàncies entre punts situats a l'espai quadridimensional:

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2+(w_1-w_2)^2}$$

La distància a la que nosaltres desitgem els punts és r i el centre ha d'estar situat a les coordenades (a,b,c,d); de manera que la fórmula per a aquesta hiperesfera serà:

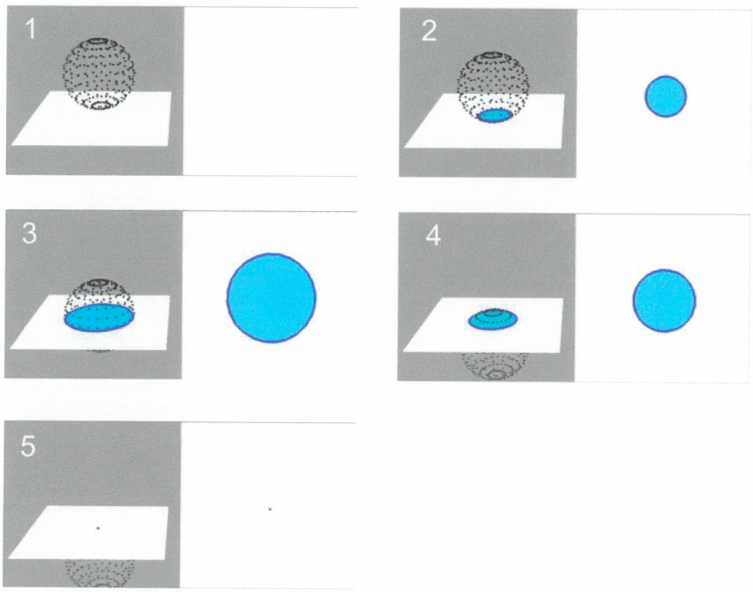
$$r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+(w-d)^2}$$

equació de la hiperesfera: $r^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+(w-d)^2$

3.2. Característiques de la hiperesfera fent ús de l'analogia

La nostra capacitat imaginativa, com sempre passa quan intentem imaginar objectes de més de 3 dimensions, es queda curta a l'hora de fer-nos una imatge de la hiperesfera. No obstant sí que podem deduir-ne algunes característiques si fem ús altre cop de l'analogia. Què passaria si una hiperesfera travessés el nostre espai tridimensional? Com serien les seves seccions 3D? Per a respondre aquesta pregunta plantegem el cas en una dimensió inferior: què succeeix quan una esfera talla un espai 2? Ho podem veure fàcilment amb aquestes seqüències:

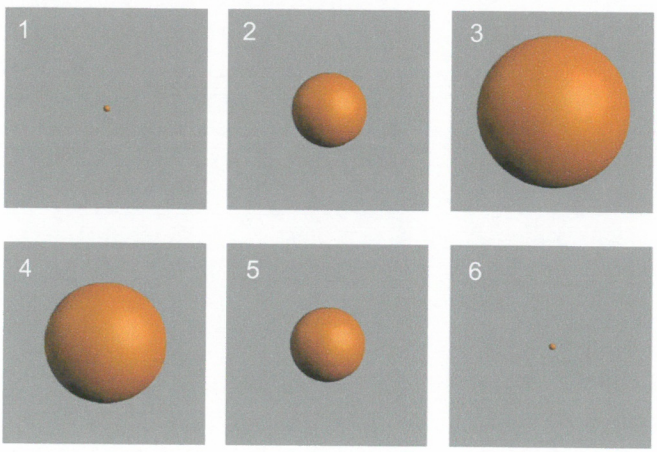
>3.1. Secció de l'esfera



A mesura que l'esfera toca l'espai 2D, apareix un punt que creix i esdevé un cercle. Aquest segueix augmentant de mida fins el moment en què l'esfera travessa l'espai 2D just per la meitat. En aquest punt el radi del cercle és el mateix que el radi de l'esfera 3D. A partir d'aquell instant el tamany retrocedeix i el cercle acaba esdevenint altre cop un punt. Quan l'esfera ja no toca l'espai 3D el cercle desapareix.

Ara que ja hem vist què passa quan una esfera 3D travessa un espai 2D podem deduir quines conseqüències tindria que una hiperesfera 4D passés a través del nostre espai de tres dimensions. Observem aquesta seqüència:

>3.2. Secció de la hiperesfera



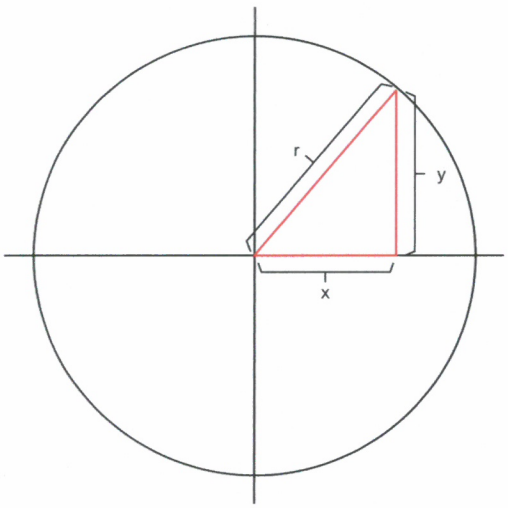
La imatge 1 mostra el primer contacte entre la hiperesfera i l'espai 3D, que és un punt. A mesura que es va endinsant en el nostre espai l'esfera va creixent fins la imatge 3, moment en que la hiperesfera és seccionada per l'espai tridimensional just per la meitat. En aquest instant, el radi de l'esfera que observem és el mateix que el de la hiperesfera original. A continuació es repeteix el procés a la inversa. A mesura que la hiperesfera surt del

nostre espai, la seva secció es va fent petita fins acabar en un punt (imatge 6) i desaparèixer.
Cal destacar que tot i que les seccions augmenten i disminueixen el radi de la hiperesfera es manté constant. El fet que nosaltres tallem per un punt o per un altre és el que determina el tamany de la secció resultant. Tal com ja hem dit, si desitgem saber el radi real de la hiperesfera haurem de tallar-la just per la seva meitat. En aquell instant, el radi de l'esfera resultant serà el mateix que el de la hiperesfera.
Podem fer una altra reflexió interessant. El conjunt de cercles 2D obtinguts en seccionar una esfera, considerats en conjunt formen una superfície 2D (la superfície de l'esfera). Anàlogament, la família d'esferes 3D obtinguda en la secció d'una hiperesfera; considerades en conjunt; formen una *hipersuperfície* tridimensional. Per aquest motiu podem dir que la *hipersuperfície* d'una hiperesfera és un espai tridimensional corbat cap una quarta dimensió. Si una persona es trobés situada dins la hipersuperfície tridimensional d'una hiperesfera ella no en seria conscient doncs la curvatura cap a l'espai quadridimensional no l'afectaria i seguiria tenint només 3 graus de llibertat. És el mateix cas que el d'una formiga caminant per sobre un globus: només té 2 graus de llibertat i el fet que la superfície per sobre la qual camina estigui corbada cap una tercera direcció no modifica el fet que només pugui moure's en dues direccions diferents.

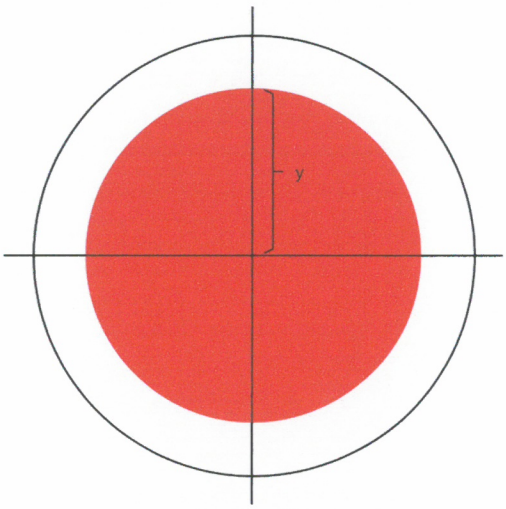
3.3. Càlcul del volum d'una hiperesfera

A continuació ens disposem a trobar una fórmula que ens permeti calcular el volum d'una hiperesfera en funció del seu radi. En primer lloc, però,buscarem la fórmula per calcular volums d'esferes tridimensionals i aplicarem un procediment similar per trobar la fórmula que ens interessa.

Considerem l'esfera presentada a continuació. El seu radi és r i en primer lloc cerquem l'àrea del cercle dibuixat en vermell.



Vista lateral



Vista frontal

Aplicant el teorema de Pitàgores podem escriure:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Aïllem la y, que és el radi de la circumferència vermella i apliquem la fórmula de l'àrea d'un cercle per calcular la seva àrea:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$A = \pi \cdot r^2;\ A = \pi \cdot y^2$$

$$A = \pi \cdot (r^2 - x^2)$$

De manera que tenim una expressió que ens calcula l'àrea d'un cercle inscrit dins una circumferència de radi r i el centre del qual es troba a distància x del centre de l'esfera.
Nosaltres busquem una fórmula que ens calculi el volum de l'esfera. Aquest volum serà la "suma" de totes les àrees de totes les circumferències que hi ha dins l'esfera. Si situem l'esfera amb el centre a l'origen de coordenades, voldrà dir sumar les àrees de totes les seccions des de x= -r fins a x=r. Aquest procés es duu a terme fent la integral de la funció àrea des de r fins –r:

$$V = \int_{-r}^{r} \pi \cdot (r^2 - x^2)$$

Com que l'esfera és simètrica, podem calcular el volum d'una meitat i multiplicar el resultat per dos amb la qual cosa aconseguirem simplificar la integral. Al mateix temps podem treure π, que és una constant, fora de la integral. Procedim a resoldre-la:

$$V = 2\pi \int_{0}^{r} (r^2 - x^2)$$

$$V = 2\pi \left[r^2 \cdot x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r$$

$$V = 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) \; ; \; V = 2\pi \left(\frac{3r^3 - r^3}{3} \right) \; ; \; V = 2\pi \frac{2r^3}{3}$$

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

D'aquesta manera aconseguim la fórmula que ens permet determinar el volum de l'esfera només en funció del seu radi.

Ara que ja hem fet el procés per trobar aquesta fórmula podem procedir a buscar-ne una que ens serveixi per les hiperesferes de 4 dimensions.
L'equació d'una hiperesfera, incloent-hi el seu interior s'expressa amb una desigualtat:

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \leq r^2$$

Situem la hiperesfera de radi "r" amb el centre a l'origen de coordenades , de manera que talla l'eix x des de x = -r fins a x = r. Per un valor concret de x, la secció que obtindrem serà el conjunt de punts (x,y,z,w) amb aquest valor de x. Si la x és una quantitat donada i tenim en compte que la r és un nombre fix, l'equació anterior s'aïlla de la manera següent:

$$y^2 + z^2 + w^2 \leq r^2 - x^2$$

Efectivament, la secció obtinguda en donar un determinat valor a x és una esfera, el radi de la qual és:

$$\sqrt{r^2 - x^2}$$

Aplicant la fórmula del volum d'una esfera aconseguirem el volum de les esferes (seccions) que obtindrem en funció de la coordenada x:

→Fórmula del volum de l'esfera: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

→Substituint l'expressió que determina el seu radi: $V=\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^3$

Per aclarir l'explicació utilitzarem la notació $V_n(r)$ per referir-nos al volum d'una esfera de radi r i de n dimensions. Així, el volum d'una esfera tridimensional de radi r s'indicaria amb l'expressió $V_3(r)=4/3\pi r^3$.
Seguint aquesta notació, l'expressió de dalt s'indicaria de la forma següent:

$$V_3\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)=\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^3$$

Tal com hem fet en el procés per obtenir la fórmula de l'esfera tridimensional raonem dient que l'"hipervolum" de la hiperesfera 4D l'obtindrem "sumant" el volum de totes les seccions tridimensionals d'aquesta. L'eina que ens permet fer això és la integral i ho indiquem així:

$$V_4(r)=\int_{-r}^{r}\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^3 dx$$

La hiperesfera; de la mateixa manera que l'esfera, està formada per dues meitats idèntiques. Això ens permet integrar des de x = 0 fins x = r (obtenim el volum d'un hemisferi de la hiperesfera) i multiplicar per dos el resultat per aconseguir el volum de la hiperesfera completa. Al mateix temps traiem fora de la integral les constants d'aquesta manera:

$$V_4(r)=2\frac{4}{3}\pi\int_0^r\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^3 dx$$

$$V_4(r)=\frac{8}{3}\pi\int_0^r\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^3 dx$$

Per racionalitzar l'arrel quadrada de dins la integral utilitzem un canvi de variable seguint la igualtat $x=r\sin\theta$ i que afecta de la manera següent:

→ $\sqrt{r^2-x^2}$ = $\sqrt{r^2-r^2\cdot\sin^2\theta}$ = $\sqrt{r^2\left(1-\sin^2\theta\right)}$ = $r\sqrt{1-\sin^2\theta}$ = $r\sqrt{\cos^2\theta}$ = $r\cos\theta$

→ $x=r$; $r=r\sin\theta$; $\sin\theta=1$; $\arcsin 1=\theta$; $\theta=\frac{\pi}{2}$

→ $x=0$; $0=r\sin\theta$; $\sin\theta=0$; $\arcsin 0=\theta$; $\theta=0$

→ I per últim hem de tenir en compte que: $dx=r\cos\theta\cdot d\theta$

Feta la substitució i els canvis a dalt indicats obtenim la expressió següent:

$$V_4(r)=\frac{8}{3}\pi\int_0^{\pi/2}(r\cos\theta)^3 r\cos\theta\cdot d\theta$$

$$V_4(r)=\frac{8}{3}\pi\int_0^{\pi/2} r^3\cos^3\cdot r\cos\theta\cdot d\theta$$

$$V_4(r)=\frac{8}{3}\pi\int_0^{\pi/2} r^4\cos^4\theta\cdot d\theta$$

La r és una constant que per tant surt fora de la integral:

$$V_4(r)=\frac{8}{3}\pi r^4\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\cdot d\theta$$

Per resoldre aquesta integral és necessari recórrer a una fórmula de reducció d'integrals, que s'obté per la tècnica d'integració per parts i segons la qual:

$$\int_0^{\pi/2}\cos^n\theta\cdot d\theta=\frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2}\cos^{n-2}\theta\cdot d\theta \qquad (n\geq 2)$$

Emprem aquesta fórmula un cop:

$$\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\cdot d\theta=\frac{3}{4}\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\cdot d\theta$$

Arribats a aquest punt tornem a aplicar la mateixa fórmula una altra vegada:

$$\frac{3}{4}\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\cdot d\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\int_0^{\pi/2}\cos^0\theta\cdot d\theta$$

Resolem la integral:

$$\int_0^{\pi/2}\cos^0\theta\cdot d\theta=\int_0^{\pi/2}1\cdot d\theta=[x]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}$$

Reconstruïm la fórmula i simplifiquem:

$$V_4(r)=\frac{8}{3}\pi r^4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{2}\ ;\ V_4(r)=\frac{1}{2}\pi r^4\pi$$

$$\boxed{V_4(r)=\frac{1}{2}\pi^2 r^4}$$

Així obtenim una expressió que ens permet calcular l'hipervolum (en unitats d'hipervolum) d'una hiperesfera en funció del seu radi r.

3.4. Càlcul del volum d'una n-esfera

Ara que ja hem aconseguit trobar la fórmula per calcular el volum d'hiperesferes de 4 dimensions podem buscar una fórmula que ens permeti generalitzar el càlcul per a esferes de qualsevol dimensió. A partir d'esferes de dimensió 4 (que anomenem hiperesferes) utilitzarem la notació n-esfera per referir-nos a esferes la dimensió de les quals és n.

Comencem fent una taula amb les fórmules que ens permeten calcular els volums d'esferes de 1, 2, 3 i 4 dimensions:

1D	$V_1(r)=2r$
2D	$V_2(r)=\pi r^2$
3D	$V_3(r)=4/3\,\pi r^3$
4D	$V_4(r)=1/2\,\pi^2 r^4$

La disposició de les fórmules en taules permet observar coincidències i deduir-ne patrons lògics. Aquí podem veure fàcilment que el radi sempre apareix elevat al mateix exponent que la dimensió de l'esfera que estudiem.

A continuació introduirem una nova notació. Anomenarem U_n el volum d'una esfera de n dimensions i de radi 1; premissa de la qual se'n desprenen dues igualtats lògiques:

$$V_n(1)=U_n$$

$$V_n(r)=U_n\cdot r^n$$

Procedim a calcular el n-volum d'una esfera de n dimensions i radi 1. Per fer-ho sumarem el (n-1)-volum de totes les seccions de n-1 dimensions. Així doncs integrarem des de x = -1 fins a x = 1:

$$U_n=\int_{-1}^{1} \underbrace{V_{n-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)}\cdot dx$$

Volum d'una esfera de dimensió n-1 i radi $\sqrt{1-x^2}$

Tenint en compte la igualtat que hem descrit a les línies superiors ($V_n(r)=U_n\cdot r^n$) substituïm:

$$U_n=\int_{-1}^{1} U_{n-1}\cdot\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{n-1}\cdot dx$$

Com que la hiperesfera és simètrica integrarem només des de x=0 fins a x=1 i multiplicarem per 2 el resultat per obtenir el volum complet. Traiem fora de la integral les constants i obtenim:

$$U_n=2\cdot U_{n-1}\int_{0}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{n-1}\cdot dx$$

Per racionalitzar l'arrel quadrada de dins la integral utilitzem un canvi de variable seguint la igualtat $x = r\sin\theta = \sin\theta$; i que afecta de la manera següent:

$\rightarrow \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{\cos^2\theta} = \cos\theta$

$\rightarrow x = r = 1 \ ; \ 1 = \sin\theta \ ; \ \arcsin 1 = \theta \ ; \ \theta = \frac{\pi}{2}$

$\rightarrow x = 0 \ ; \ 0 = \sin\theta \ ; \ \arcsin 0 = \theta \ ; \ \theta = 0$

→ I per últim hem de tenir en compte que: $dx = \cos\theta \cdot d\theta$

Feta la substitució i els canvis a dalt indicats obtenim l'expressió següent:

$$U_n = 2 \cdot U_{n-1} \int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{n-1} \cos\theta \cdot d\theta$$

$$U_n = 2 \cdot U_{n-1} \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1}\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta$$

$$U_n = 2 \cdot U_{n-1} \int_0^{\pi/2} \cos^{n}\theta \cdot d\theta$$

Tal com ja s'ha explicat en el cas de la hiperesfera de 4 dimensions, per resoldre aquesta integral és necessari recórrer a una fórmula de reducció d'integrals, que s'obté per la tècnica d'integració per parts i segons la qual:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n\theta \cdot d\theta = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2}\theta \cdot d\theta \qquad (n \geq 2)$$

No obstant això ens trobem davant dues situacions possibles. Estem buscant una fórmula general que ens permeti calcular l'n-volum d'una esfera n-dimensional i per tant n pot prendre qualsevol valor enter i positiu. Així doncs el càlcul es desenvoluparà de manera diferent si n és un nombre parell o és un nombre imparell, ja que segons la paritat de n la fórmula de reducció aplicada reiteradament ens portarà a exponent 1 o bé 0. Separem els dos casos:

→<u>Si n és un nombre imparell</u>:

Apliquem la fórmula de reducció d'integrals fins que l'exponent del cosinus esdevingui 1:

$$U_n = 2 \cdot U_{n-1} \cdot \frac{(n-1)(n-3)...4 \cdot 2}{n(n-2)...5 \cdot 3} \int_0^{\pi/2} \cos^1\theta \cdot d\theta$$

Resolem la integral i simplifiquem:

$$U_n = 2 \cdot U_{n-1} \cdot \frac{(n-1)(n-3)...4 \cdot 2}{n(n-2)...5 \cdot 3} [\sin\theta]_0^{\pi/2}$$

$$U_n = 2 \cdot U_{n-1} \cdot \frac{(n-1)(n-3)...4 \cdot 2}{n(n-2)...5 \cdot 3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$U_n = 2 \cdot U_{n-1} \cdot \frac{(n-1)(n-3)...4 \cdot 2}{n(n-2)...5 \cdot 3} \cdot 1$$

$$U_n = 2 \cdot U_{n-1} \cdot \frac{(n-1)(n-3)...4 \cdot 2}{n(n-2)...5 \cdot 3}$$

→Si n és un nombre parell:

Apliquem la fórmula de reducció d'integrals fins que l'exponent del cosinus esdevingui 0:

$$U_n = 2 \cdot U_{n-1} \cdot \frac{(n-1)(n-3)...3 \cdot 1}{n(n-2)...4 \cdot 2} \int_0^{\pi/2} \cos^0 \theta \cdot d\theta$$

$$U_n = 2 \cdot U_{n-1} \cdot \frac{(n-1)(n-3)...3 \cdot 1}{n(n-2)...4 \cdot 2} \int_0^{\pi/2} 1 \cdot d\theta$$

Resolem la integral i simplifiquem:

$$U_n = 2 \cdot U_{n-1} \cdot \frac{(n-1)(n-3)...3 \cdot 1}{n(n-2)...4 \cdot 2} [x]_0^{\pi/2}$$

$$U_n = 2 \cdot U_{n-1} \cdot \frac{(n-1)(n-3)...3 \cdot 1}{n(n-2)...4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$U_n = U_{n-1} \cdot \frac{(n-1)(n-3)...3 \cdot 1 \cdot \pi}{n(n-2)...4 \cdot 2}$$

Arribats a aquest punt tenim dues fórmules que ens permeten determinar l'n-volum d'una esfera de n-dimensions segons si n és un nombre parell o imparell. No obstant això, les fórmules obtingudes ens determinen l'n-volum d'n-esferes el radi de les quals és 1 i també observem que depenen de n i a més, per calcular U_n, cal haver calculat U_{n-1} primer. Fora desitjable aconseguir fórmules que ens donessin U_n només en termes de n. A continuació es presenten els passos a seguir per obtenir-les. Seguim distingint els dos casos segons la paritat de n:

→Si n és un nombre imparell:

Recuperem l'última fórmula que hem obtingut per a calcular n-volums d'esferes de n dimensions, sent n un nombre imparell:

$$U_n = 2 \cdot U_{n-1} \cdot \frac{(n-1)(n-3)...4 \cdot 2}{n(n-2)...5 \cdot 3}$$

Si n és un nombre imparell, n-1 serà parell. Així doncs apliquem la fórmula obtinguda anteriorment per calcular els n-volums quan n és parell de la manera següent:

$$U_n = U_{n-1} \cdot \frac{(n-1)(n-3)...3 \cdot 1 \cdot \pi}{n(n-2)...4 \cdot 2}$$

$$U_{n-1} = U_{n-2} \cdot \frac{(n-2)(n-4)...3 \cdot 1 \cdot \pi}{(n-1)(n-3)...4 \cdot 2}$$

I substituïm a la fórmula inicial, d'aquesta manera:

$$U_n = 2 \cdot U_{n-2} \cdot \frac{(n-2)(n-4)...3 \cdot 1 \cdot \pi}{(n-1)(n-3)...4 \cdot 2} \cdot \frac{(n-1)(n-3)...4 \cdot 2}{n(n-2)...5 \cdot 3}$$

Arribats a aquest punt podem simplificar l'expressió obtinguda tal com es mostra en el pas següent:

$$U_n = \frac{2 \cdot U_{n-2} \cancel{(n-2)}\cancel{(n-4)}...\cancel{5 \cdot 3} \cdot \pi \cancel{(n-1)}\cancel{(n-3)}...\cancel{4 \cdot 2}}{\cancel{(n-1)}\cancel{(n-3)}...\cancel{4 \cdot 2} n \cancel{(n-2)}\cancel{(n-4)}...\cancel{5 \cdot 3}}$$

I obtenim una fórmula de reducció per als U_n:

$$U_n = U_{n-2} \cdot \frac{2\pi}{n}$$

Com que n és un nombre imparell podem escriure: $n = 2k+1$

$$U_n = U_{n-2} \cdot \frac{2\pi}{n} \; ; \; U_{2k+1} = U_{2k-1} \cdot \frac{2\pi}{2k+1}$$

Apliquem reiteradament la fórmula de reducció anterior tal com s'indica a continuació:

$$U_{2k+1} = U_{2k-1} \cdot \frac{2\pi}{2k+1}$$

$$\uparrow$$

$$U_{2k-1} = U_{2k-3} \cdot \frac{2\pi}{2k-1}$$

$$U_{2k+1} = U_{2k-3} \cdot \frac{2\pi}{2k-1} \cdot \frac{2\pi}{2k+1}$$

$$U_{2k+1} = U_{2k-5} \frac{2\pi}{2k-3} \cdot \frac{2\pi}{2k-1} \cdot \frac{2\pi}{2k+1}$$

$$U_{2k+1} = U_{2k-7} \frac{2\pi}{2k-5} \cdot \frac{2\pi}{2k-3} \cdot \frac{2\pi}{2k-1} \cdot \frac{2\pi}{2k+1}$$

Així doncs aplicarem la fórmula de reducció de dalt tantes vegades com sigui necessari fins que arribem a U_1:

$$U_{2k+1} = U_1 \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{2\pi}{5} \cdot \underbrace{\ldots\ldots}_{k} \cdot \frac{2\pi}{2k-1} \cdot \frac{2\pi}{2k+1}$$

Tenint en compte que U_1 significa el "1-volum" d'una "1-esfera" de radi 1 (és a dir, la longitud d'un interval de centre 0 i radi 1) establim que $U_1 = 2$. Substituïm:

$$U_{2k+1} = 2 \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{2\pi}{5} \cdot \underbrace{\ldots\ldots}_{k} \cdot \frac{2\pi}{2k-1} \cdot \frac{2\pi}{2k+1}$$

Arribats a aquest punt i observant l'expressió anterior ja podem plantejar una fórmula general per a qualsevol valor parell i positiu de n:

$$\boxed{U_{2k+1} = \frac{2^{k+1} \cdot \pi^k}{(2k+1)(2k-1)\ldots 5 \cdot 3 \cdot 1}}$$

→<u>Si n és un nombre parell</u>:

En aquesta ocasió recuperem l'última fórmula que hem obtingut per a calcular n-volums d'esferes de n dimensions, sent n un nombre parell:

$$U_n = U_{n-1} \cdot \frac{(n-1)(n-3)\ldots 3 \cdot 1 \cdot \pi}{n(n-2)\ldots 4 \cdot 2}$$

Si n és un nombre parell, n-1 serà imparell. Així doncs apliquem la fórmula obtinguda abans per calcular n-volums de n-esferes quan n és un valor imparell:

$$U_n = 2 \cdot U_{n-1} \cdot \frac{(n-1)(n-3)\ldots 4 \cdot 2}{n(n-2)\ldots 5 \cdot 3}$$

$$U_{n-1} = 2 \cdot U_{n-2} \cdot \frac{(n-2)(n-4)\ldots 4 \cdot 2}{(n-2)(n-4)\ldots 5 \cdot 3}$$

Seguidament substituïm a la fórmula inicial:

$$U_n = 2 \cdot U_{n-2} \cdot \frac{(n-2)(n-4)...4 \cdot 2}{(n-1)(n-3)...5 \cdot 3} \cdot \frac{(n-1)(n-3)...5 \cdot 3\pi}{n(n-2)...4 \cdot 2}$$

Simplifiquem l'expressió:

$$U_n = 2 \cdot U_{n-2} \cdot \frac{\cancel{(n-2)}\cancel{(n-4)}...\cancel{4 \cdot 2}}{\cancel{(n-1)}\cancel{(n-3)}...\cancel{5 \cdot 3}} \cdot \frac{\cancel{(n-1)}\cancel{(n-3)}...\cancel{5 \cdot 3}\pi}{n\cancel{(n-2)}\cancel{(n-4)}...\cancel{4 \cdot 2}}$$

De manera que obtenim una fórmula de reducció per als U_n:

$$U_n = 2 \cdot U_{n-2} \cdot \frac{\pi}{n}$$

$$U_n = U_{n-2} \cdot \frac{2\pi}{n}$$

Com que n és un nombre parell, podem escriure que $n = 2k$:

$$U_{2k} = U_{2k-2} \cdot \frac{2\pi}{2k}$$

Apliquem reiteradament la fórmula de reducció anterior:

$$U_{2k} = U_{2k-2} \cdot \frac{2\pi}{2k}$$

$$\uparrow$$

$$U_{2k-2} = U_{2k-4} \cdot \frac{2\pi}{2k-2}$$

$$U_{2k} = U_{2k-4} \cdot \frac{2\pi}{2k} \cdot \frac{2\pi}{2k-2}$$

$$U_{2k} = U_{2k-6} \cdot \frac{2\pi}{2k} \cdot \frac{2\pi}{2k-2} \cdot \frac{2\pi}{2k-4}$$

Aplicarem la fórmula de reducció de dalt k-1 vegades amb la qual cosa aconseguirem el resultat següent:

$$U_{2k} = U_2 \cdot \frac{2\pi}{2k} \cdot \frac{2\pi}{2k-2} \cdot \frac{2\pi}{2k-4} \cdot \overbrace{.....}^{k-1} \cdot \frac{2\pi}{4}$$

Tenint en compte que U_2 significa el "2-volum" d'una "2-esfera" de radi 1 (és a dir, la superfície d'un cercle de radi 1); aconseguim que $U_2 = \pi$:

$$U_{2k} = \pi \cdot \frac{2\pi}{2k} \cdot \frac{2\pi}{2k-2} \cdot \frac{2\pi}{2k-4} \cdot \overbrace{\ldots\ldots}^{k-1} \cdot \frac{2\pi}{4}$$

Procedim a simplificar l'expressió obtinguda:

$$U_{2k} = \pi \cdot \frac{2^{k-1} \cdot \pi^{k-1}}{(2k)(2k-2)(2k-4)\ldots 4}$$

$$U_{2k} = \frac{2^{k-1} \cdot \pi^{k}}{(2k)(2k-2)(2k-4)\ldots 2^2}$$

$$U_{2k} = \frac{2^{k-1} \cdot \pi^{k} \cdot 2}{(2k)(2k-2)(2k-4)\ldots 2^2 \cdot 2}$$

$$U_{2k} = \frac{2^{k} \cdot \pi^{k}}{[2(k)][2(k-1)][2(k-2)]\ldots[2\cdot 2][2\cdot 1]}$$

$$U_{2k} = \frac{2^{k} \cdot \pi^{k}}{2^k (k)(k-1)(k-2)\ldots 2\cdot 1}$$

$$U_{2k} = \frac{2^{k} \cdot \pi^{k}}{2^k \cdot k!}$$

$$\boxed{U_{2k} = \frac{\pi^{k}}{k!}}$$

D'aquesta manera aconseguim una fórmula generalitzada per calcular n-volums de n-esferes, sent n un valor parell.

Així doncs, arribats a aquest punt disposem de dues fórmules que ens permeten calcular volums d'esferes de n-dimensions i el radi de les quals és 1. Tal com hem vist al principi d'aquest apartat, si volem calcular volums de n-esferes el radi de les quals és diferent de 1, només cal afegir multiplicant a ambdues fórmules l'expressió r^n. Al mateix temps podem finalitzar el desenvolupament de les fórmules tornant-les a posar en funció de n tenint en compte les igualtats establertes en els passos anteriors. A continuació mostrem aquesta última simplificació:

cas en que n és un valor imparell	cas en que n és una valor parell
$U_{2k+1}=\frac{2^{k+1}\cdot\pi^k}{(2k+1)(2k-1)....5\cdot3\cdot1}$	$U_{2k}=\frac{\pi^k}{k!}$
$V_{2k+1}(r)=\frac{2^{k+1}\cdot\pi^k\cdot r^{2k+1}}{(2k+1)(2k-1)....5\cdot3\cdot1}$	$V_{2k}(r)=\frac{\pi^k\cdot r^{2k}}{k!}$
Tenint en compte que $n=2k+1$ substituïm:	Tenint en compte que $n=2k$ substituïm:
$V_n(r)=\frac{2^{n+1/2}\cdot\pi^{n-1/2}\cdot r^n}{n(n-2)....5\cdot3}$	$V_n(r)=\frac{\pi^{n/2}\cdot r^n}{(n/2)!}$

Ara ja disposem de dues fórmules amb les que podem calcular els volums d'esferes de qualsevol dimensió i de radi variable. L'objectiu d'aquestes fórmules és poder computar-les a fi d'obtenir resultats per valors variables de n. La complexitat de les fórmules ens obliga a emprar un programa informàtic que ens efectuï els càlculs i que ens permeti treballar amb els resultats. La fórmula corresponent al cas en que n és parell no comporta cap problema a l'hora d'introduir-la a l'ordinador. Tanmateix topem amb més dificultats quan volem introduir la fórmula per valors de n imparells, degut a la sèrie que apareix en el denominador d'aquesta. Així doncs, procedim a fer una última manipulació d'aquesta fórmula que ens permeti expressar-la d'una altra manera més pràctica per al seu posterior tractament informàtic.

Recuperem la fórmula corresponent a valors imparells de n abans de fer l'última substitució:

$$V_{2k+1}(r)=\frac{2^{k+1}\cdot\pi^k\cdot r^{2k+1}}{(2k+1)(2k-1)....5\cdot3\cdot1}$$

Fixem-nos en el que significa la sèrie que apareix al denominador:

$$(2k+1)(2k-1)...9\cdot7\cdot5\cdot3\cdot1$$

Ja que volem expressar la fórmula d'una manera més simplificada posem, al denominador, l'expressió factorial (!) i observem els canvis:

$$(2k+1)!=(2k+1)(2k)(2k-1)(2k-2)...9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$$

En emprar la funció factorial, al denominador apareix, multiplicant a la sèrie inicial, els valors següents:

$$(2k)(2k-2)...8\cdot6\cdot4\cdot2$$

Ja que estem estudiant el cas en que n és un nombre imparell i segons la igualtat establerta anteriorment $n=2k+1$, k serà un nombre parell de manera que podem treure factor comú 2 de cada un dels elements de la sèrie:

$$[2(k)][2(k-1)]...[2\cdot4][2\cdot3][2\cdot2][2\cdot1]$$

$$2^k(k)(k-1)...4\cdot3\cdot2\cdot1$$

$$2^k\cdot k!$$

Així doncs tenim que:

$$(2k+1)!=\underbrace{(2k+1)(2k-1)...9\cdot7\cdot5\cdot3\cdot1}_{\text{sèrie inicial}}\cdot2^k\cdot k!$$

Reconstruïm la fórmula inicial tenint en compte la igualtat anterior:

$$V_{2k+1}(r)=\frac{2^{k+1}\cdot\pi^k\cdot r^{2k+1}}{\frac{(2k+1)!}{2^k\cdot k!}}$$

Fixem-nos en que hem afegit al denominador $2^k\cdot k!$ dividint per tal de no alterar la sèrie que hi havia inicialment a la primera fórmula. Per acabar simplifiquem:

$$V_{2k+1}(r)=\frac{2^{k+1}\cdot\pi^k\cdot r^{2k+1}\cdot2^k\cdot k!}{(2k+1)!}$$

$$V_{2k+1}(r)=\frac{2^{2k+1}\cdot\pi^k\cdot r^{2k+1}\cdot k!}{(2k+1)!}$$

Ja per acabar, i tenint en compte que $n=2k$, expressem la fórmula només en funció de n:

$$V_n(r)=\frac{2^n\cdot\pi^{n-1/2}\cdot r^n\cdot\left(n-1/2\right)!}{n!}$$

D'aquesta manera ja disposem de dues fórmules compactes i fàcilment computables per calcular n-volums de n-esferes de radi variable:

cas en que n és un valor imparell	cas en que n és una valor parell
$V_n(r)=\frac{2^n\cdot\pi^{n-1/2}\cdot r^n\cdot\left(n-1/2\right)!}{n!}$	$V_n(r)=\frac{\pi^{n/2}\cdot r^n}{\left(n/2\right)!}$

3.5. Computació de resultats

3.5.1. COMPUTACIÓ DE VALORS ENTERS I POSITIUS

Ara que disposem de dues fórmules compactes per calcular els n-volums de n-esferes podem introduir-les en un full de càlcul perquè ens computi els resultats

→ ***Taula A***

>3.3. Taula A

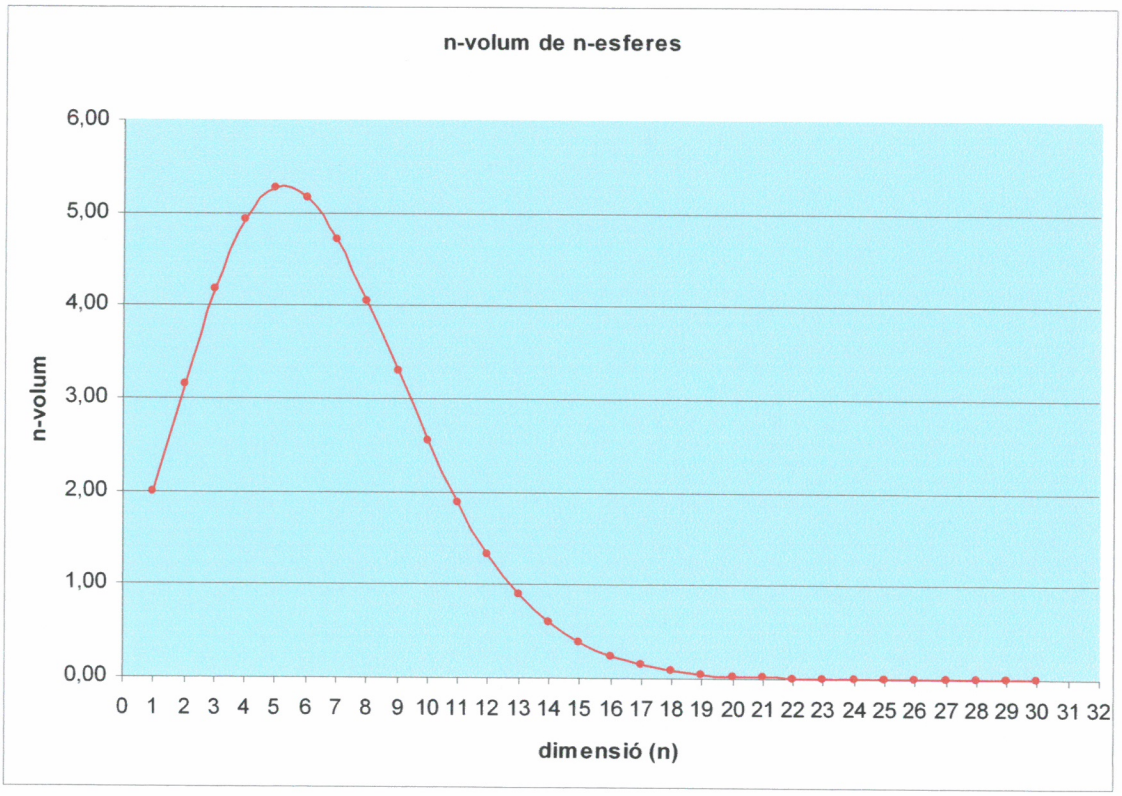
n	radi	$V_n(r)$ n-volum	v. n-esfera / v. n-cub
1	1,0	2,00000000000000	1,00000000000
2	1,0	3,14159265358979	0,78539816340
3	1,0	4,18879020478639	0,52359877560
4	1,0	4,93480220054468	0,30842513753
5	1,0	5,26378901391432	0,16449340668
6	1,0	5,16771278004997	0,08074551219
7	1,0	4,72476597033140	0,03691223414
8	1,0	4,05871212641677	0,01585434424
9	1,0	3,29850890273871	0,00644240020
10	1,0	2,55016403987735	0,00249039457
11	1,0	1,88410387938990	0,00091997260
12	1,0	1,33526276885459	0,00032599189
13	1,0	0,91062875478328	0,00011116074
14	1,0	0,59926452932079	0,00003657620
15	1,0	0,38144328082330	0,00001164073
16	1,0	0,23533063035889	0,00000359086
17	1,0	0,14098110691714	0,00000107560
18	1,0	0,08214588661113	0,00000031336
19	1,0	0,04662160103009	0,00000008892
20	1,0	0,02580689139001	0,00000002461
21	1,0	0,01394915040902	0,00000000665
22	1,0	0,00737043094571	0,00000000176

23	1,0	0,00381065638685	0,00000000045
24	1,0	0,00192957430940	0,00000000012
25	1,0	0,00095772240882	0,00000000003
26	1,0	0,00046630280577	0,00000000001
27	1,0	0,00022287212472	0,00000000000
28	1,0	0,00010463810492	0,00000000000
29	1,0	0,00004828782274	0,00000000000
30	1,0	0,00002191535345	0,00000000000

La primera columna mostra la dimensió de la n-esfera estudiada i la segona ens indica el radi de la n-esfera. A la tercera columna apareix l'n-volum calculat amb una fórmula o l'altra segons la paritat de n. La quarta columna serveix per fer una observació curiosa. En aquesta apareix la proporció entre el volum de la n-esfera i la caixa cúbica més petita (de costat 2r) que podria contenir-la:

$$\frac{V_n(1)}{2^n}$$

Sorprenentment aquesta proporció s'aproxima a 0 ràpidament a mesura que la n augmenta. Això vol dir que com més gran sigui la n, menys quantitat d'espai del n-cub serà ocupada per la n-esfera. Podem intentar justificar aquest curiós comportament pensant que com més gran és el nombre de dimensions, en més direccions diferents es pot expandir la n-esfera de manera que cada cop ocupa una proporció menor de l'espai que hi ha dins del n-cub que la conté.
Si presentem els volums en una gràfica veurem el següent:



Els punts vermells són els valors de la taula anterior. Hem afegit una línia de tendència entre els punts per veure més clarament el comportament de la gràfica però no tenim en compte els valors fraccionaris de n.
Els resultats són visuals i alhora sorprenents. Partim d'una 1-esfera (un interval comprès entre -1 i 1), que té 1-volum igual a 2. A continuació una 2-esfera (un cercle) que té 2-volum (àrea) igual a π. El 3-volum d'una 3-esfera és més gran que els dos anteriors, així com també ho és el 4-volum d'una 4-esfera (hiperesfera) i el 5-volum d'una 5-esfera. No obstant, a partir d'aquí el n-volum comença a decréixer a mesura que n es fa més gran, de manera que per a valors de n molt grans el seu n-volum és molt pròxim a 0.
El fet que la n on una n-esfera tingui valor màxim sigui 5, depèn del radi de la esfera? Ho veurem més clar emprant una altra taula i un altre gràfic.

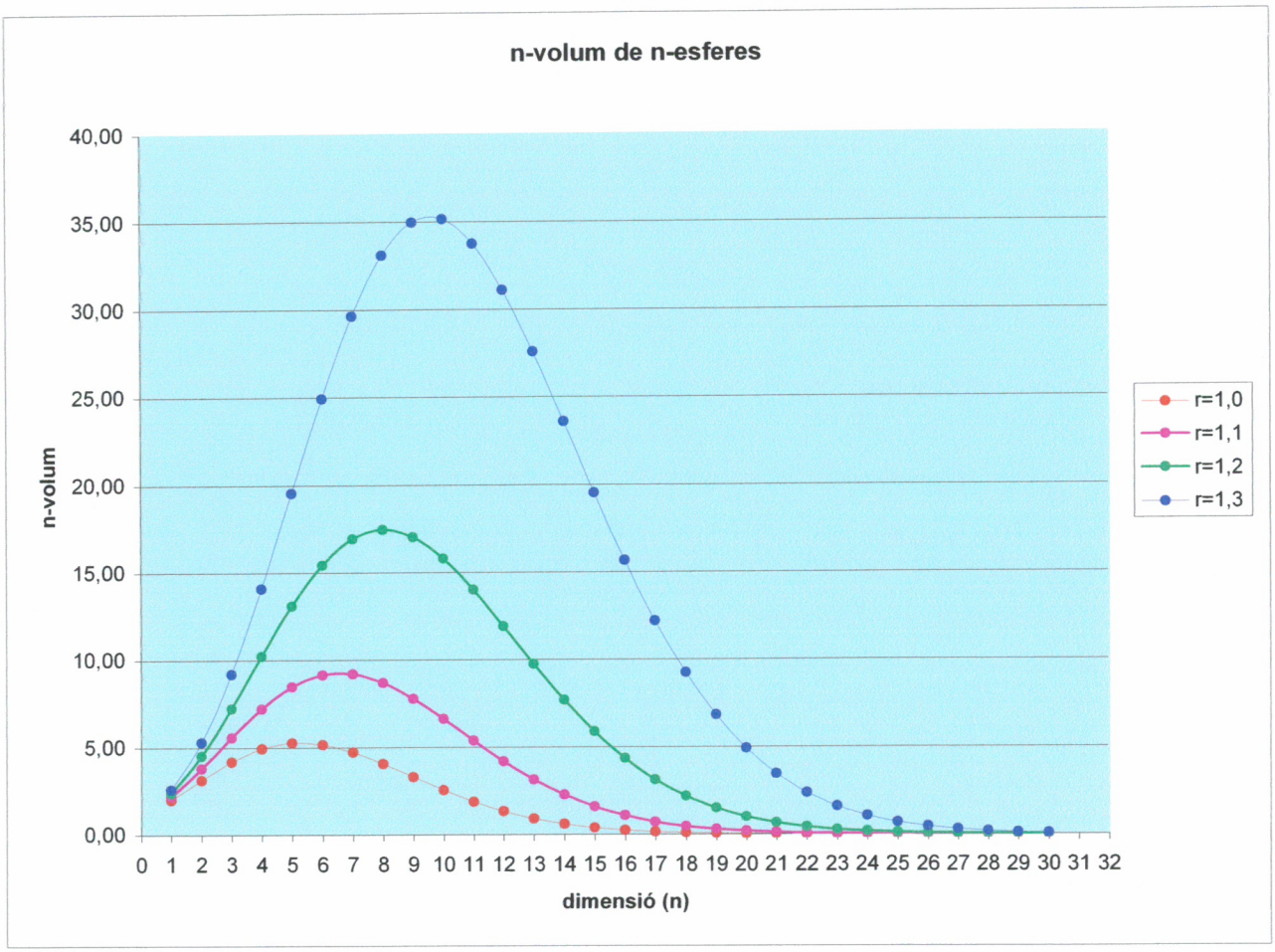
→ ***Taula B***

>3.4. Taula B

n	n-volum (r=1,0)	n-volum (r=1,1)	n-volum (r=1,2)	n-volum (r=1,3)
1	2,00000000000000	2,20000000000000	2,40000000000000	2,60000000000000
2	3,14159265358979	3,80132711084365	4,52389342116930	5,30929158456675
3	4,18879020478639	5,57527976257069	7,23822947387088	9,20277207991570
4	4,93480220054468	7,22504390181747	10,23280584304940	14,09428856497570
5	5,26378901391432	8,47738484479916	13,09799147910330	19,54408014343290
6	5,16771278004997	9,15491842033811	15,43070767782470	24,94356255616020
7	4,72476597033140	9,20723223988290	16,92969070938480	29,64720578103610
8	4,05871212641677	8,70020989719829	17,45171923692450	33,10816169213390
9	3,29850890273871	7,77771145095568	17,01958142724830	34,97903559092750
10	2,55016403987735	6,61446875045002	15,78994356880330	35,15617685050440
11	1,88410387938990	5,37556825433399	13,99904953632430	33,76616350894050
12	1,33526276885459	4,19062656415230	11,90533697192390	31,10906564965390
13	0,91062875478328	3,14373743713696	9,74310893846164	27,58067811709580
14	0,59926452932079	2,27570605281910	7,69406794344149	23,59530006534890
15	0,38144328082330	1,59338324655505	5,87690485712566	19,52451496316540
16	0,23533063035889	1,08133788936153	4,35089291892057	15,65929100903550
17	0,14098110691714	0,71258481565809	3,12782249646926	12,19545211608020
18	0,08214588661113	0,45672433720138	2,18699731690187	9,23774910828378
19	0,04662160103009	0,28513347142491	1,48946690677501	6,81570645156753
20	0,02580689139001	0,17361586051857	0,98937427740473	4,90459036009501
21	0,01394915040902	0,10322719953681	0,64173233720084	3,44634027677950
22	0,00737043094571	0,05999733431470	0,40689307132958	2,36726366587269
23	0,00381065638685	0,03412176975441	0,25244597377517	1,59109786339642
24	0,00192957430940	0,01900579112573	0,15339507404227	1,04737442163904
25	0,00095772240882	0,01037664067499	0,09136309439698	0,67580819970822
26	0,00046630280577	0,00555747915918	0,05338022817689	0,42775509251528
27	0,00022287212472	0,00292185226054	0,03061606679112	0,26578242870312
28	0,00010463810492	0,00150898544255	0,01724903307643	0,16221975092478
29	0,00004828782274	0,00076599422151	0,00955198780265	0,09731837324408
30	0,00002191535345	0,00038240981818	0,00520218581707	0,05741813056236

En aquesta nova taula, la primera columna indica la dimensió estudiada, en la segona hi ha el càlcul de l'n-volum d'una n-esfera de radi 1; a la tercera hi ha el mateix càlcul però per un radi de 1,1; a la quarta amb un radi de 1,2 i a la cinquena amb un radi de 1,3.

Si posem els resultats en una gràfica observarem el següent:



En aquest gràfic hi ha 4 sèries, que corresponen als 4 radis diferents pels quals hem calculat el volum. S'observa clarament com el volum màxim s'assoleix a dimensions diferents depenent del radi de la n-esfera estudiada.
En el cas en que el radi val 1, el màxim volum s'assoleix a n=5. Quan el radi de la n-esfera val 1,1 el màxim es desplaça fins la dimensió 7. En cas que el radi sigui 1,2 trobem el màxim a la dimensió 8 i finalment, quan optem per un valor de radi de 1,3 el màxim l'hem de cercar en n=10.
Notem també com fent una variació de l'ordre de dècimes d'unitat en el radi l'n-volum augmenta en una proporció molt més gran.

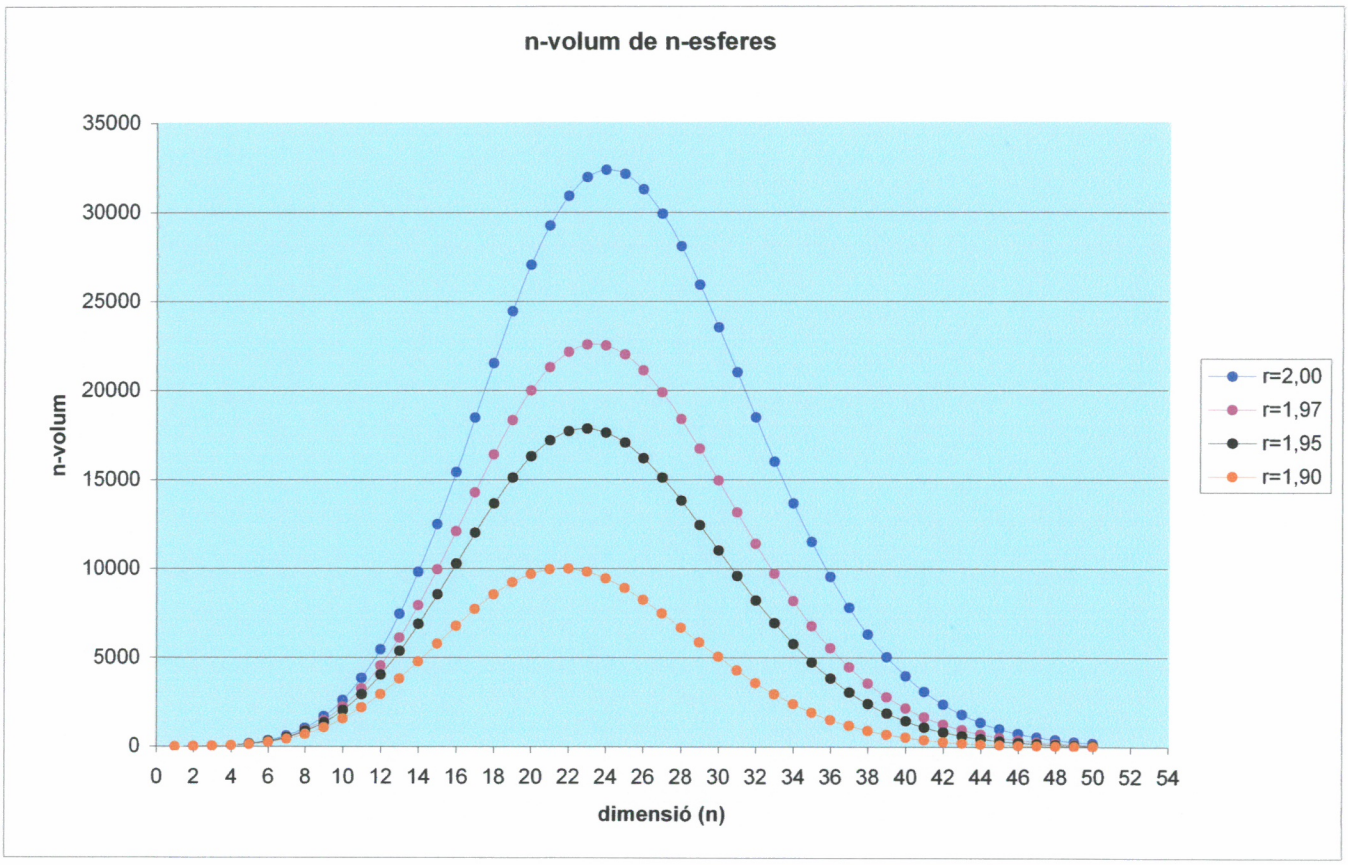
Finalment proposem una última taula amb uns radis pròxims a 2:

→ ***Taula C***

>3.5. Taula C

n	n-volum (r=2,00)	n-volum (r=1,97)	n-volum (r=1,95)	n-volum (r=1,90)
1	4,0000	3,9400	3,9000	3,8000
2	12,5664	12,1922	11,9459	11,3411
3	33,5103	32,0249	31,0594	28,7309
4	78,9568	74,3250	71,3523	64,3108
5	168,4412	156,1815	148,4129	130,3366
6	330,7336	302,0617	284,1228	243,1196
7	604,7700	544,0564	506,5503	422,3335
8	1039,0303	920,6998	848,5260	689,3139
9	1688,8366	1474,0550	1344,7116	1064,3882
10	2611,3680	2245,0725	2027,2823	1563,5225
11	3858,6447	3267,6334	2920,6907	2194,7975
12	5469,2363	4562,0648	4036,2873	2955,3570
13	7459,8708	6129,1789	5367,7380	3829,4656
14	9818,3500	7945,9484	6888,1585	4788,1637
15	12499,1334	9963,7624	8549,6658	5790,7389
16	15422,6282	12109,8308	10285,6618	6787,9100
17	18478,6756	14291,7944	12015,7064	7726,3101
18	21534,0513	16405,0626	13652,3944	8553,6335
19	24443,1460	18341,9490	15109,3158	9223,7092
20	27060,4869	20001,3918	16309,0221	9700,8036
21	29253,4887	21297,9845	17189,9493	9962,6157
22	30913,8280	22169,1916	17711,4587	10001,6604
23	31966,1027	22579,9508	17856,4800	9825,0012
24	32372,8850	22524,2810	17631,6185	9452,5271
25	32135,8314	22023,9546	17064,9466	8914,1446
26	31293,0516	21124,6688	16201,9737	8246,3479
27	29913,3902	19890,4157	15100,4629	7488,6404
28	28088,5774	18396,8810	13824,8040	6680,2189
29	25924,3274	16724,6941	12440,6008	5857,2269
30	23531,4316	14953,2386	11009,9874	5050,7574
31	21017,7230	13155,5439	9588,0160	4285,6572
32	18481,5431	11394,5612	8220,2672	3580,0872
33	16007,0604	9720,9160	6941,6690	2945,7139
34	13661,5247	8172,0499	5776,3847	2388,3708
35	11494,3231	6772,5382	4738,5443	1909,0161
36	9537,5435	5535,2957	3833,5638	1504,8261
37	7807,6715	4463,3615	3059,7949	1170,2939
38	6308,0161	3551,9722	2410,2839	898,2346
39	5031,4920	2790,6783	1874,4627	680,6399
40	3963,4434	2165,3190	1439,6512	509,3507

Expressem els resultats en una gràfica:



En aquest gràfic també trobem 4 sèries, que mostren els n-volums per n-esferes de radi 2; 1.97; 1.95 i 1.90. A la taula només apareixen els càlculs per n compreses entre 1 i 40, tanmateix en el gràfic apareixen també els punts corresponents a les n situades entre 40 i 50 per facilitar la visualització de la tendència. Els càlculs es poden trobar a l'arxiu indicat a dalt.

Tal com ja havíem vist a la gràfica anterior, el màxim volum es desplaça a dimensions superiors a mesura que augmentem el radi de l'esfera que estudiem. En aquest cas els radis són molt semblants, per la qual cosa els màxims també els aconseguim a dimensions molt pròximes. Quan el radi és 1,90 el màxim volum l'aconseguim a la dimensió 22; quan el radi val 1,95 el màxim cal cercar-lo a la dimensió 23, on també hi ha el màxim quan estudiem una esfera de radi 1,97. Finalment, quan el radi val 2, trobem el volum màxim a la dimensió 24.

3.5.2. COMPUTACIÓ DE VALORS POSITIUS

Amb les fórmules que hem trobat en l'apartat anterior hem pogut calcular els n-volums de n-esferes, les n dels quals eren valors positius i enters. Prendre valors de n negatius no tindria sentit doncs una dimensió negativa no significa res. No obstant sí que existeixen dimensions fraccionaries, les quals van lligades amb el tema dels fractals. El tema de les dimensions no enteres s'allunya d'aquest treball i no hi hem fet referència en cap ocasió. No obstant, amb les fórmules que hem trobat per calcular n-volums de n-esferes i un programari adequat podem intentar cercar en quina dimensió una esfera de radi donat tindria un n-volum més gran (contemplant també valors no enters de n).

En primer lloc hem de dir que la funció factorial (x!) porta problemes a la majoria de programes informàtics quan han de processar valors no enters de x. Per aquest motiu substituirem aquesta funció per la funció gamma. La relació entre la funció factorial i la funció gamma és la següent:

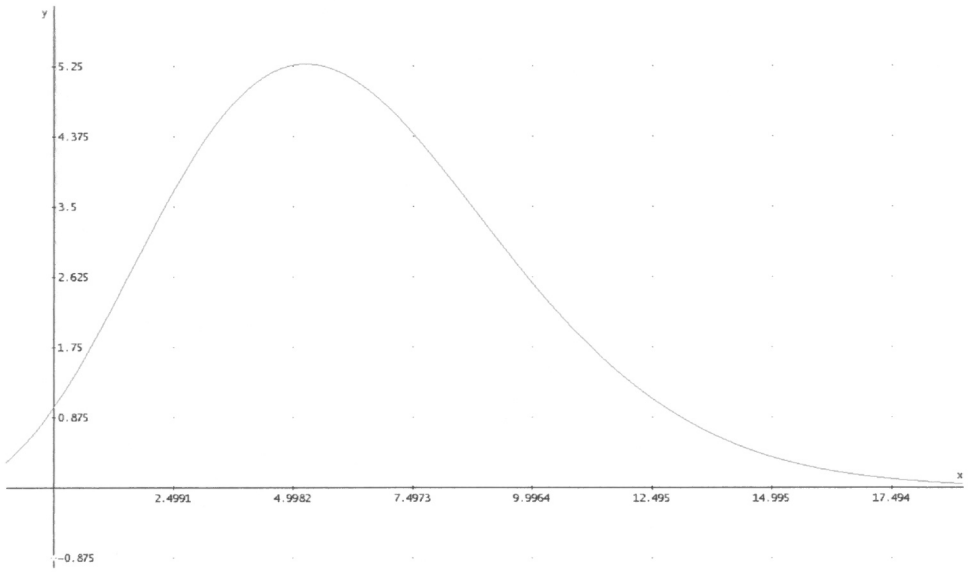
$$x! = \Gamma(x+1)$$

Duent a terme aquest canvi, les fórmules per calcular el n-volum de n-esferes queden de la manera següent:

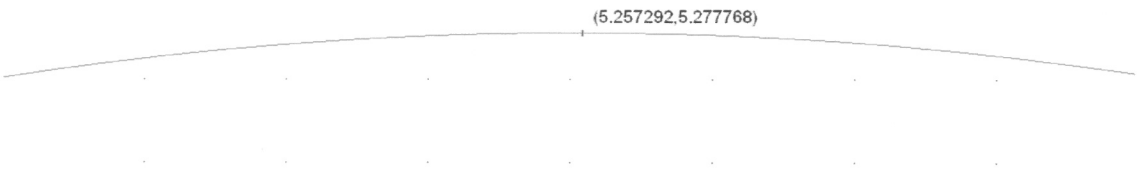
cas en que n és un valor imparell	**cas en que n és una valor parell**
$V_n(r) = \dfrac{2^n \cdot \pi^{n-1/2} \cdot r^n \cdot \Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}$	$V_n(r) = \dfrac{\pi^{n/2} \cdot r^n}{\Gamma\left(\dfrac{n+2}{2}\right)}$

La manera ortodoxa de trobar el màxim d'aquestes funcions seria derivant-les i buscant-ne el seu màxim. No obstant, la complexitat que comporta la manipulació de la funció gamma ha fet que en aquest treball només la puguem tractar gràficament.
Si utilitzem un programa informàtic per dibuixar ambdues funcions ens donarem compte que totes dues són la mateixa funció, vàlida per valors parells i imparells i ja siguin enters o no. Si introduïm qualsevol de les dues a l'ordinador i donem valor 1 a la variable radi (r) obtindrem la gràfica següent:

3. La hiperesfera

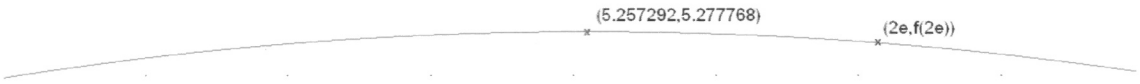


Despreciant els valors negatius de n pel motiu ja explicat, podem observar com el màxim se situa a valors molt pròxims a 5 tal com ja havíem vist en les gràfiques obtingudes en el primer subapartat. Si ens apropem més a la gràfica podrem trobar una bona aproximació del màxim de la funció. Utilitzem el terme "aproximació" perquè el busquem mitjançant tècniques gràfiques i per tant cometem un mínim d'error.



Mitjançant una ampliació considerable de la funció i un mètode de seguiment del cursor hem pogut trobar que el màxim de la funció n-volum per un radi de 1, es troba aproximadament a la dimensió 5,257292. En aquesta dimensió, el 5,257292-volum d'una 5,257292-esfera de radi 1 val 5,277768 unitats de 5,257292-volum.

Donem tanta importància a aquest fet perquè en un article publicat a la revista l'Escaire el gener de 1895 (corresponent al nombre 13 de la revista), el Sr. Jordi Salat i el Sr. Jordi Lleonart publicaren quelcom notòriament diferent. En ell deien: "Les esferes de radi unitat tenen un volum màxim en un espai de dimensió 2e". Si tornem novament a la nostra gràfica i hi posem el cursor sobre el punt (2e, f(2e)) obtindrem el següent:

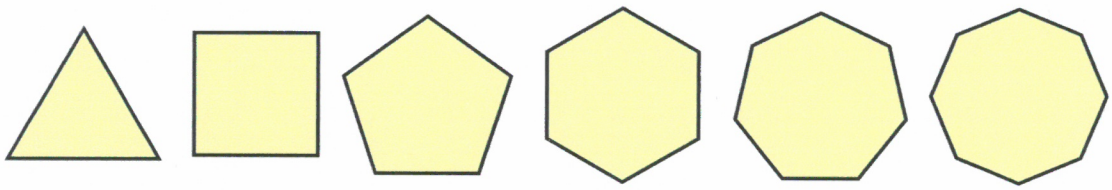


Quan calculem el punt (2e,f(2e)); observem com aquest aproximadament correspon a (5.436563657,5.271087539). Si el situem a la nostra gràfica veurem com efectivament no és un màxim, la qual cosa significa que la tesi anteriorment esmentada en l'article citat no és correcta.

A més de l'hipercub i la hiperesfera, existeixen moltes altres figures de quatre dimensions. Una de les famílies que més interès acapara és aquella que destaca per posseir la característica de la regularitat. Abans d'endinsar-nos en el tractament de les figures regulars quadridimensionals ens referirem primer a les de tres dimensions i també a les de dues.

4.1. Figures regulars planes: polígons regulars

→ Anomenem polígon aquella figura plana limitada per una línia poligonal tancada. Direm que aquest és regular si tots els angles i tots els costats que el constitueixen tenen el mateix valor.
El polígon regular més simple és el triangle equilàter, en el que cada un dels seus angles interiors val 60 graus. Si afegim un costat més, aconseguirem el quadrat, amb angles de 90 graus. El polígon regular amb 5 costats s'anomena pentàgon i en aquest cas els seus angles interiors mesuren 72 graus. Si parem atenció ens adonarem que sigui quin sigui el nombre de costats d'un polígon, si aquests tenen la mateixa longitud, sempre el podrem construir de manera que sigui regular.
Per aquest motiu podem dir que **a l'espai bidimensional es poden construir un nombre infinit de polígons regulars**.



Alguns polígons regulars. D'esquerra a dreta el triangle equilàter, el quadrat, el pentàgon regular, l'hexàgon regular, l'heptàgon regular i l'octàgon regular. El nombre de polígons regulars que podem construir és infinit.

4.2. Sòlids regulars tridimensionals: poliedres regulars

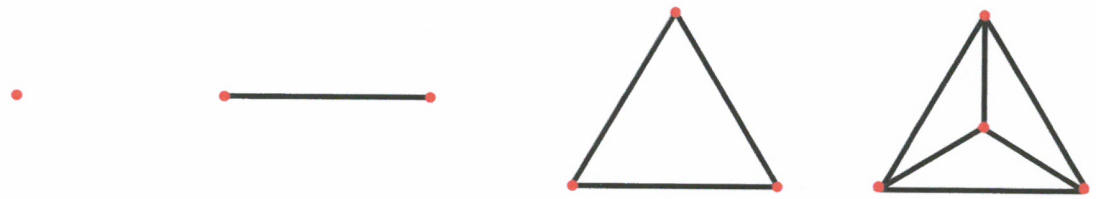
4.2.1. DETERMINACIÓ DELS POLIEDRES REGULARS

Un cop descrites les figures bidimensionals regulars ens podem referir a aquelles que tenen tres dimensions. Òbviament aquestes estaran limitades per polígons 2D. Els sòlids regulars tridimensionals els anomenarem poliedres regulars tot i que també són coneguts amb el nom de *sòlids platònics.*

→ Els poliedres regulars són aquelles figures tridimensionals limitades per polígons regulars i als vèrtexs del quals hi conflueixen el mateix nombre de cares planes.

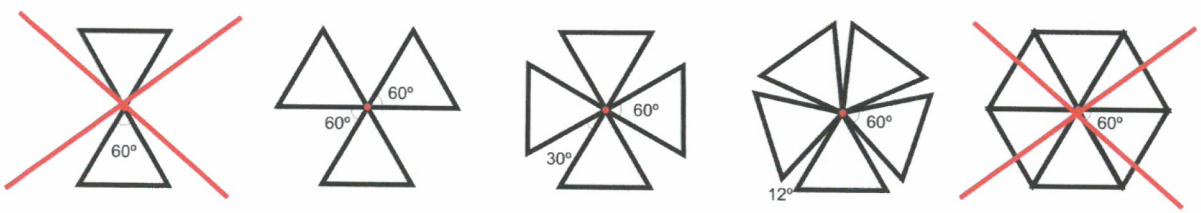
A diferència dels polígons regulars, el nombre de poliedres que tenen aquesta característica és molt limitat. Els matemàtics grecs varen descobrir-los i ja en varen estudiar les seves propietats.

Comencem pels més simples i els més populars. En primer lloc trobaríem el **cub**, format per cares quadrades. Com ja hem explicat anteriorment té 6 cares, 12 arestes i 8 vèrtexs, a cada un dels quals hi conflueixen 3 cares.
A continuació ens referirem a **l'octaedre**, poliedre que ja ha aparegut en aquest treball quan seccionàvem l'hipercub. Aquest està constituït per 8 cares planes que són triangles equilàters, té 12 arestes i 6 vèrtexs. A cada un dels seus vèrtexs hi conflueixen 3 cares triangulars.
Podem trobar fàcilment un tercer poliedre regular si seguim el procés següent:
Comencem agafant dos punts del pla separats per una distància c. Els unim per obtenir un segment. A continuació cerquem un tercer punt al pla que es trobi situat a distància c dels dos vèrtexs del segment i l'unim amb aquests, amb la qual cosa obtindrem un triangle equilàter. Per últim, busquem un quart punt a l'espai tridimensional que es trobi també a distància c dels tres vèrtexs del triangle i l'unim. La figura que obtindrem serà un **tetraedre**, el qual estarà constituït per 4 vèrtexs, 6 arestes i 4 cares que seran triangles equilàters de costat c. En aquest cas, en un mateix vèrtexs hi confluiran 3 cares triangulars.



Procés d'obtenció del tetraedre. D'esquerra a dreta: el punt, el segment, el triangle equilàter i el tetraedre.

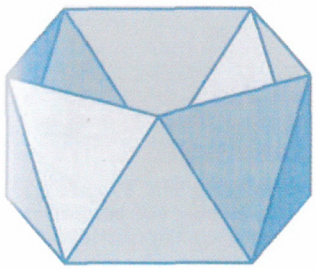
Arribat a aquest punt ens podem plantejar si es poden construir més poliedres regulars a l'espai 3D. Euclides, en el seu tretzè i últim llibre, ja va demostrar que n'hi havia dos més. Seguirem el procés que plantejà ell perquè aquest ens servirà a l'hora d'estudiar figures regulars en dimensions superiors. En primer lloc Euclides observà que en un poliedre regular, els angles de les cares que confluïen en un mateix vèrtex havien de sumar menys de 360º. Si no fos així no es podria muntar la figura a l'espai tridimensional. De la mateixa manera remarcà que per construir un poliedre era necessari que com a mínim 3 cares es trobessin en un vèrtex determinat. Amb aquestes dues observacions podem dir que si volem fer un poliedre regular amb cares triangulars només tenim 3 opcions: que 3, 4 o 5 triangles conflueixin en un vèrtex. Sis triangles ja sumarien 360º i per tant no tindríem espai per muntar el poliedre.



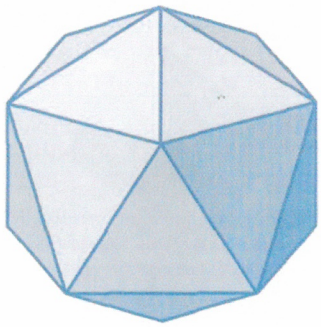
Opcions que tenim per crear un poliedre amb cares triangulars. Observem com només és possible fer confluir 3, 4 o 5 triangles a cada vèrtexs. 2 són insuficients i 6 no ens deixen espai per muntar la figura.

Tres triangles confluint en un mateix punt i amb una base triangular a sota dona lloc a un tetraedre. Quatre triangles en un vèrtex donen lloc a una piràmide de base quadrada, i si

aquesta la unim a una segona piràmide idèntica obtindrem un octaedre. Aquestes figures ja les coneixem però hi ha un tercer cas possible que encara no sabem quin poliedre ens permet obtenir: el de 5 cares al voltant d'un vèrtex. Si intentem muntar aquest obtindrem una piràmide pentagonal, amb una base de pentàgon regular i 5 triangles equilàters com a costats. Per obtenir un poliedre regular que inclogui aquesta figura hem de començar construint una tira formada per 10 triangles equilàters iguals col·locats alternativament senyalant cap amunt i cap avall. Col·locant aquesta tira entremig de dues de les piràmides pentagonals descrites anteriorment obtindrem un poliedre regular constituït per 20 triangles equilàters, 30 arestes i 12 vèrtexs que anomenarem **icosaedre**.

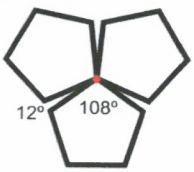


Tira formada per 10 triangles equilàters

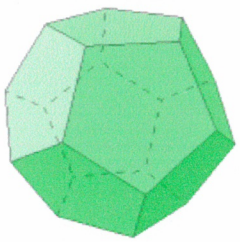


Icosaedre obtingut en muntar dues piràmides de base pentagonal a sobre i a sota de la tira de triangles.

De moment hem trobat tots els poliedres regulars que podíem construir mitjançant cares triangulars però ens podem preguntar si fent ús d'altres polígons en podem obtenir més. Si parem atenció al cas de les cares quadrades, veurem com en podem posar 3 al voltant d'un vèrtexs (amb la qual cosa obtindrem el cub que ja sabíem) però si n'hi situem 4 els angles ja sumaran 360º i per tant no serà possible muntar la figura.

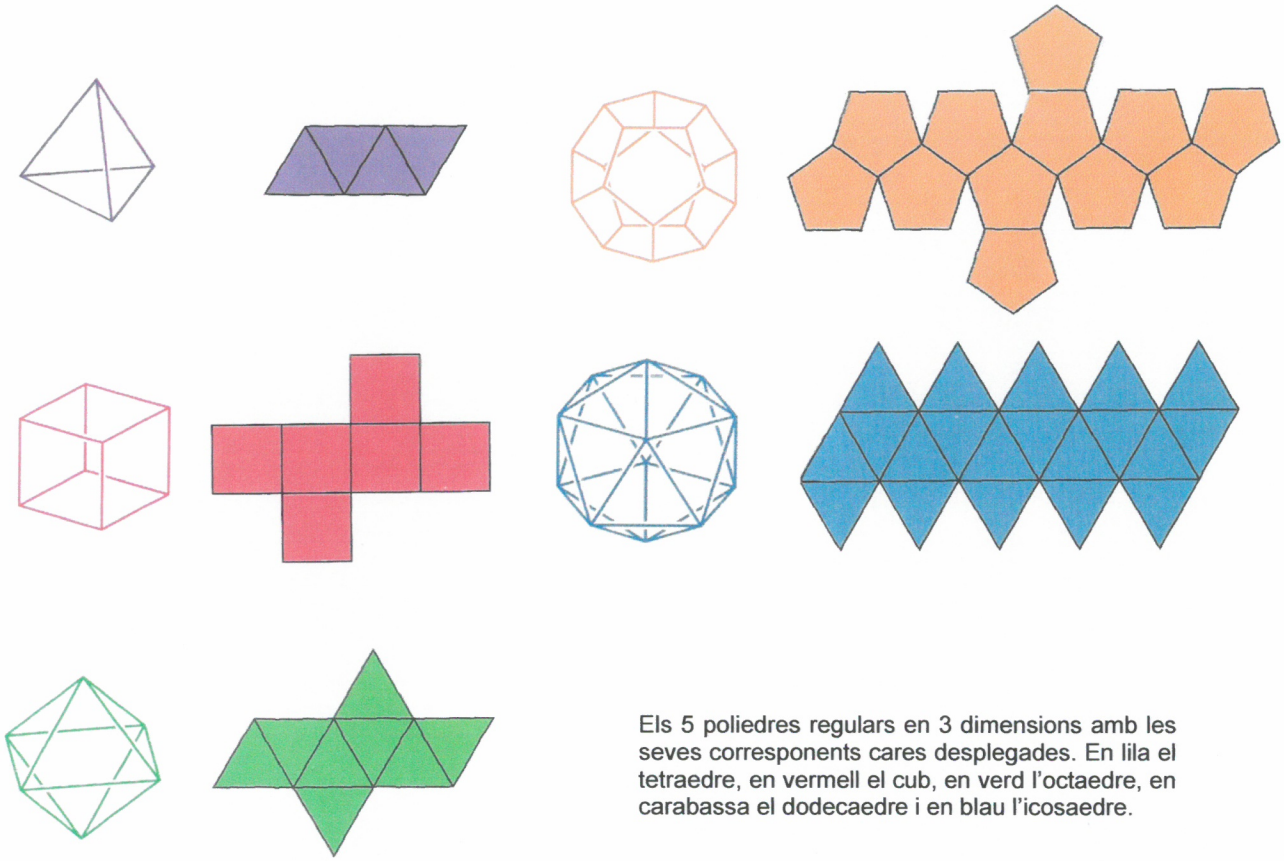


Si intentem posar pentàgons al voltant d'un vèrtex veurem que només tenim una opció. Dos resultaran insuficients i 4 sumaran més de 360º (els seus angles mesuren 108º i per tant 4 necessitarien 432º). Per aquest motiu només ens queda intentar posar-ne 3 al voltant d'un vèrtex, amb la qual cosa encara ens restarà espai per muntar la figura. Si la intentem construir observarem com l'única opció que tenim és emprant 12 cares pentagonals, de manera que obtindrem una figura que tindrà 30 arestes i 20 vèrtexs i que anomenarem **dodecaedre**.



Dodecaedre

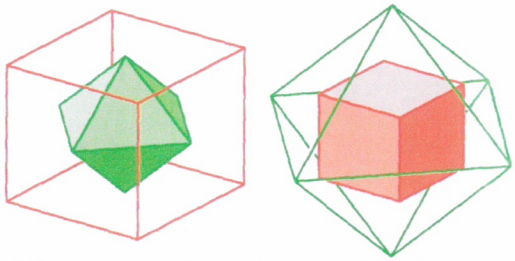
Podem preguntar-nos si es podria trobar algun altre poliedre regular mitjançant polígons amb un nombre de cares superiors. Aquesta pregunta queda ràpidament resolta. El següent polígon que hauríem de provar seria l'hexàgon. L'angle que es forma entre dues arestes d'aquest val 120º. Si intentem posar-ne tres al voltant d'un vèrtex ens adonem que ja sumen 360º i que per tant no ho podem muntar. Si intentem fer el mateix amb polígons de més cares observarem com els angles cada cop es fan més grans. Per aquest motiu podem determinar que només existeixen cinc poliedres regulars a l'espai tridimensional: el tetraedre, el cub, l'octaedre, el dodecaedre i l'icosaedre.



Els 5 poliedres regulars en 3 dimensions amb les seves corresponents cares desplegades. En lila el tetraedre, en vermell el cub, en verd l'octaedre, en carabassa el dodecaedre i en blau l'icosaedre.

4.2.2. DUALITAT DELS POLIEDRES

Un concepte que relaciona alguns dels poliedres estudiats és la dualitat. Per exemple si prenem els centres de les cares quadrades d'un cub aquests seran els vèrtexs d'un nou octaedre que quedarà inscrit en el seu interior. Per aquest motiu podem dir que **l'octaedre és el *dual* del cub**. De manera contrària, traçant els centres de les 8 cares triangulars de l'octaedre aconseguirem els 8 vèrtexs del cub. Així doncs, **el cub és el *dual* de l'octaedre**.



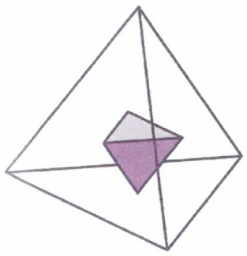
A l'esquerra podem veure com l'octaedre és el dual del cub. A la dreta veiem com també és el cas a l'inrevés: el cub és el dual de l'octaedre.

Si cerquem els duals d'altres poliedres obtindrem resultats interessants.

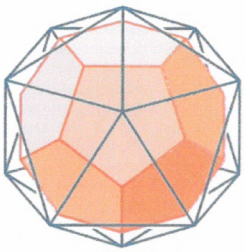
En el cas del tetraedre, els punts centrals de les seves cares constitueixen les cares triangulars d'un nou tetraedre, la qual cosa vol dir que **el tetraedre és dual d'ell mateix**.

Vist això passem a buscar el dual de l'icosaedre. Al voltant de cada vèrtex d'aquest hi trobarem 5 triangles, els centres dels quals definiran 5 punts que resultaran ser els vèrtexs d'un pentàgon regular. L'icosaedre té 12 vèrtexs, de manera que obtenim un conjunt de 12 pentàgons regulars. A més aquest té 20 cares triangulars, de manera que la figura dual tindrà 20 vèrtexs. A cada un d'aquests hi aniran a parar 3 pentàgons regulars. Amb tota aquesta informació podem determinar que **el poliedre dual de l'icosaedre serà el dodecaedre**.

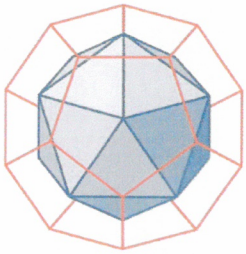
Per últim fixem-nos en el dodecaedre. Aquest està format per 20 vèrtexs, amb 3 pentàgons confluint a cada un d'aquests. Els centres dels pentàgons donaran lloc a 20 triangles equilàters, que seran les cares de la nova figura. A més, aquesta tindrà 12 vèrtexs (un per cada una de les cares pentagonals del dodecaedre). Reunint totes aquestes característiques podem concloure dient que **l'icosaedre és el dual del dodecaedre**.



El dual del tetraedre és ell mateix.



El dual de l'icosaedre és el dodecaedre.

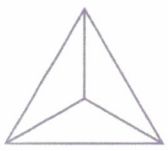


El dual del dodecaedre és l'icosaedre.

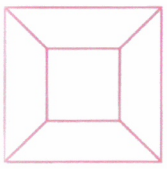
4.2.3. DIAGRAMES D'SCHLEGEL

El 1883, el matemàtic alemany Viktor Schlegel va inventar una nova manera de representar els poliedres regulars tridimensionals. Fem menció d'aquests diagrames perquè ens resultaran molt útils a l'hora de configurar models tridimensionals de figures regulars de dimensions superiors.

Per aconseguir el diagrama d'Schlegel d'un determinat poliedre, ens hem d'imaginar que ens situem molt a prop d'aquest i observem per una de les seves cares situades a la part més superior. Fent-ho amb els 5 poliedres anteriors obtindrem les figures bidimensionals següents:

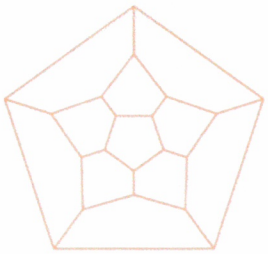


Tetraedre

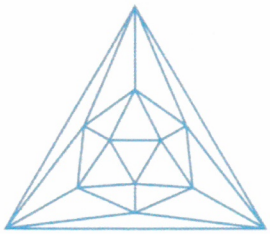


Cub

Octaedre



Dodecaedre



Icosaedre

Mitjançant aquestes figures bidimensionals podem observar les simetries que posseeixen els diferents poliedres regulars. Al mateix temps, aquestes seran útils en l'estudi de figures quadridimensionals.

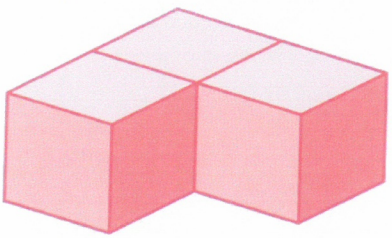
4.3. Hipersòlids regulars de 4 dimensions: politops

4.3.1. DETERMINACIÓ DELS POLITOPS REGULARS

Ara que ja hem vist que a l'espai tridimensional només existeixen 5 figures que compleixen la condició de ser regulars, ens podem preguntar si a l'espai de 4 dimensions hi podem trobar "hipersòlids" que siguin també regulars. Efectivament sí que existeixen i se'ls denomina *politops*.

→ Els politops són figures de 4 dimensions, les "cares" dels quals són poliedres regulars tridimensionals. Es caracteritzen per la disposició idèntica que tenen les seves cares tridimensionals a cada un dels seus vèrtexs.

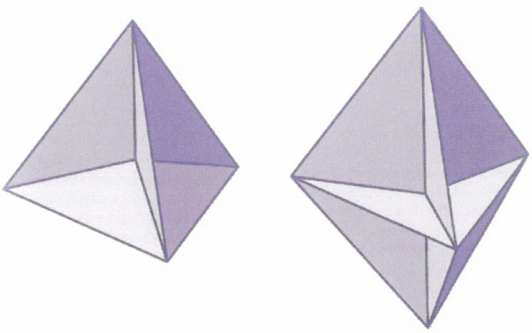
Ara que ja sabem que existeixen figures regulars 4D podem preguntar-nos quines són i quantes n'hi ha. Aquesta qüestió esdevingué molt popular a partir de la dècada de 1880; sobretot a EEUU, Escandinava i Alemanya. Un gran nombre de matemàtics iniciaren una cursa per ser els primers en determinar quines eren aquestes figures. Una de les primeres propostes que millors resultats obtingué fou la de l'americà William Stringham.
Per entendre el seu raonament ens hem de referir al cas de tres dimensions que ja hem vist abans. Per poder muntar un poliedre a l'espai tridimensional feia falta que la suma dels angles dels polígons que confluïen en un vèrtex fos inferior a 360º. De manera anàloga, per estudiar el nombre de politops quadridimensionals que poden existir, haurem de fixar-nos en el nombre de poliedres regulars que podem fer cabre al voltant d'una mateixa aresta. Per poder muntar la figura a l'espai quadridimensional serà necessari que la suma dels angles que conflueixin a una mateixa aresta sigui inferior a 360º. Si estudiem el cas en què les cares del politop són cubs, observarem que només existeix una possibilitat. Dos cubs no són suficients per muntar el politop i amb 4 ocuparem tot l'espai al voltant de l'aresta, de manera que la única opció possible és situant-ne 3. Amb aquesta configuració obtindrem un politop que ja coneixíem: **l'hipercub**.



Vist que no podem construir més politops mitjançant cubs, intentem trobar-ne de nous amb un altre poliedre i agafem el tetraedre. Per descobrir quants tetraedres podrem posar al voltant d'una aresta serà necessari calcular l'angle dièdric que es forma entre dues cares del tetraedre. Aquest càlcul es pot trobar a l'annex 6 del treball, on es demostra que aquest angle val aproximadament 70º 31' 43,61''. Amb aquesta informació ja podem concloure que només podrem situar 3 (211,59º), 4 (282,12º) o bé 5 (352,64) tetraedres al voltant d'una aresta ja que 6 ja ocuparan 423,17º.
En primer lloc ocupem-nos del cas en què trobem 3 tetraedres al voltant d'una aresta. Per obtenir el politop resultat seguirem el mateix procés que hem emprat per aconseguir el tetraedre tridimensional. Tracem un segment d'una distància determinada "c". Seguidament dibuixem una línia perpendicular al segment. Tots els punts d'aquesta seran equidistants als dos vèrtexs del segment. Cerquem aquell punt sobre la línia que estigui a distància "c" dels dos vèrtexs i un cop localitzat l'unim amb aquests dos. Obtindrem un triangle equilàter. A continuació dibuixem una línia a l'espai perpendicular al triangle i que passi pel seu centre. Busquem el punt d'aquesta a distància "c" dels tres vèrtexs del triangle i l'unim amb aquest, de manera que obtenim un tetraedre. Per obtenir un politop regular hem de trobar el punt central del tetraedre i dibuixar una línia cap a la quarta dimensió (que per tant serà perpendicular al tetraedre). Sobre aquesta línia cal que cerquem un punt que es trobi a

distància "c" dels quatre vèrtexs del tetraedre. Si l'unim amb aquests obtindrem un hipersòlid regular de 4 dimensions que anomenarem **4-simplex**. Tot i que nosaltres no podem fabricar aquest objecte sí que podem entendre i estudiar el procés seguit mitjançant models tridimensionals. Per aconseguir un model bidimensional d'un tetraedre 3D només cal traçar 4 punts al pla i unir tots els vèrtexs amb tots. De manera anàloga, per obtenir un model del 4-simplex sobre el pla només haurem de dibuixar 5 punts i unir tots els vèrtexs amb tots. Obtindrem resultats diferents segons si el cinquè punt el dibuixem dins els altres 4 o no tal com podem veure a continuació a les imatges de sota.

Si ens fixem en les projeccions dels 4-simplex de la dreta observarem com al voltant de cada aresta s'hi troben 3 tetraedres.



Projeccions tridimensionals de 4-simplex. En la de l'esquerra, el cinquè vèrtex se situa dins els altres 4 i a la de la dreta a fora.

Ara que ja hem trobat el politop 4D amb 3 tetraedres al voltant dels seus vèrtexs podem investigar altres casos. Per aquesta finalitat ens basarem en el principi de dualitat explicat anteriorment. En aquest cas, com que els politops estan limitats per figures tridimensionals, haurem de cercar els punts centrals d'aquestes i unint aquells que provinguin de cares 3D que comparteixin un vèrtex obtindrem un nou poliedre tridimensional que serà la cèl·lula dual del vèrtex. El conjunt de cèl·lules duals constituiran el politop dual. Tal com succeïa amb el cas del tetraedre, el 4-simplex és dual d'ell mateix. Per descriure el politop dual de l'hipercub haurem de determinar els punts centrals de cada una de les seves 8 cares cúbiques. Al voltant de cada un dels 16 vèrtexs que té hi trobem 4 cubs, de manera que obtenim 4 punts. Per tant, la cèl·lula dual que apareixerà serà un tetraedre regular. El conjunt dels 16 tetraedres que obtindrem en enllaçar els punts de totes les cares de l'hipercub ens determinarà un nou politop que anomenarem **16-cèl·lula**. Aquest nou politop serà l'anàleg quadridimensional de l'octaedre tridimensional (poliedre dual del cub) i es caracteritzarà per tenir 4 tetraedres al voltant de cada aresta.

Així doncs ja hem trobat 3 politops regulars bàsics: l'anàleg del tetraedre (4-simplex), l'anàleg del cub (hipercub) i el seu dual, anàleg de l'octaedre, el 16-cèl·lula. Però l'espai quadridimensional ens permet investigar amb altres possibilitats.

Hem dit que l'angle dièdric del tetraedre ens permetia posar-ne 3, 4 o 5 al voltant d'una aresta. El cas de 3 és el de 4-simplex i 4 és el del 16-cèl·lula. Si intentem situar-ne 5 arribarem a obtenir un nou politop: el **600-cèl·lula**; caracteritzat per tenir 120 vèrtexs i 600 cèl·lules tetraèdriques. L'estudi d'aquest politop és extremadament complex degut a la gran quantitat de cèl·lules que té i, a més, les seves projeccions al pla resulten ser molt poc clares; motiu pel qual no s'ha pogut endinsar en el seu coneixement fins l'aparició de la computació gràfica. No obstant, sí que podem descriure'n la part pròxima a un dels seus vèrtex utilitzant un símil amb l'icosaedre. Al voltant de cada vèrtex de l'icosaedre hi trobem 5 triangles equilàters que constitueixen una piràmide de base pentagonal. Per a obtenir aquesta a partir d'un pentàgon en primer lloc cal marcar el punt central del polígon i traçar una recta que hi sigui perpendicular. A continuació cal trobar un punt d'aquesta línia que es trobi a la mateixa distància dels vèrtexs que la del costat del pentàgon. Per a construir un 600-cèl·lula seguirem el mateix procés però amb una dimensió més. Començarem amb un icosaedre tridimensional, al qual cercarem el seu centre. A continuació traçarem una línia dirigida cap a la quarta dimensió que, per tant, serà perpendicular a l'icosaedre. Seguidament buscarem el punt situat sobre aquesta que es trobi a una distància igual al

costat de l'icosaedre i l'unirem amb cada un dels seus 12 vèrtexs. D'aquesta manera obtindrem 20 tetraedres, cada un dels quals constituirà una cèl·lula del politop.
Tot politop regular té el seu corresponent dual, que també serà un altre politop regular. Tal com ja hem dit, cada vèrtex del 600-cèl·lula està rodejat per 20 tetraedres, motiu pel qual podem determinar que la cèl·lula del politop dual tindrà 20 vèrtexs. Tenint en compte que aquesta cèl·lula ha de ser un poliedre regular tridimensional, només pot tractar-se del dodecaedre. Com ja hem dit, per poder construir un politop cal poder situar al menys 3 poliedres regulars al voltant d'una aresta. L'angle dièdric format entre dues cares del dodecaedre és lleugerament inferior a 120º, la qual cosa ens permet encabir 3 dodecaedres al voltant d'una aresta i encara ens restarà espai per muntar-lo. Si el 600-cèl·lula tenia 120 vèrtexs, el seu politop dual tindrà 120-cèl·lules dodecaèdriques i 600 vèrtexs i s'anomenarà **120-cèl·lula**.
Hem estudiat la formació de politops mitjançant tetraedres (4-simplex, 16-cèl·lula i 600-cèl·lula), mitjançant cubs (hipercub) i mitjançant dodecaedres (120-cèl·lula). L'angle dièdric que es forma entre dues cares de l'icosaedre és superior a 120º i per tant no podrem construir cap politop regular amb aquesta figura. No obstant si que podem intentar fer una altra construcció mitjançant un cinquè poliedre regular: l'octaedre.
Si calculem l'angle dièdric de l'octaedre (veure annex 6) descobrirem que el valor d'aquest és d'uns 109º 28' 16''. Amb aquesta dada podem determinar que serà possible posar 3 octaedres al voltant d'una aresta però no 4 i que, per tant, pot existir un politop regular que tingui cares octaèdriques. Aquest objecte existeix i està constituït justament per 24 cèl·lules octaèdriques; motiu pel qual se'l coneix amb el nom de **24-cèl·lula**. Al voltant de cada un dels seus 24 vèrtexs hi podem trobar 6 octaedres regulars. Si cerquem quina serà la cèl·lula dual d'aquest politop observarem com aquesta és novament un octaedre (determinat per 6 vèrtexs sorgits dels 6 octaedres que conflueixen a cada vèrtexs del 24-cèl·lula). Tenint en compte que el 24-cèl·lula té 24 vèrtexs, obtindrem també 24-cèl·lules octaèdriques. Així doncs, aquest tetraedre és dual d'ell mateix i, per tant, podem concloure la recerca de politops regulars de 4 dimensions.

Ara que ja hem trobat tots els politops quadridimensionals regulars resumim les seves característiques al quadre següent:

nom	poliedres que el formen	núm. poliedres	núm. cares	núm. arestes	núm. vèrtexs
4- simplex	tetraedres	5	10	10	5
hipercub	cubs	8	24	32	16
16-cèl·lula	tetraedres	16	32	24	8
24-cèl·lula	octaedres	24	96	96	24
120-cèl·lula	dodecaedres	120	720	1200	600
600-cèl·lula	tetraedres	600	1200	720	120

4.3.2. DIAGRAMES D'SCHLEGEL

Els politops descrits anteriorment no poden ser construïts a l'espai tridimensional i encara menys sobre el paper. No obstant sí que podem estudiar-ne les seves projeccions 3D. Aquesta operació la durem a terme de manera poc profunda i només amb aquells politops més simples. Com ja hem apuntat, l'estudi de politops més grans porta implícit un grau molt

elevat de complexitat i que només es possible de realitzar si utilitzem ordinadors que en facin simulacions.
Si recuperem els diagrames d'Schlegel de l'apartat 4.2.3 veurem com aquests els hem obtingut mirant de molt a prop i a través d'una de les seves cares superiors, la seva estructura interna. El que hem vist ha estat un entramat de línies bidimensional que hem pogut presentar sobre el paper sense problemes. Raonant per analogia, ens podríem situar molt a prop d'una de les cares sòlides dels politops i observar el seu interior. La imatge que veuríem la podríem representar sobre una superfície tridimensional de manera que obtindríem els diagrames de Schlegel dels diferents politops.
Parem atenció al cas més simple de tots: el del 4-simplex. El seu poliedre anàleg és el tetraedre. Si ens fixem en el seu diagrama d'Schlegel observarem un triangle equilàter gran i en el seu interior 3 triangles més petits. Si raonem per analogia i intentem deduir com seria el diagrama d'Schlegel del politop 4-simplex obtindrem quelcom semblant a un tetraedre gran, a l'interior del qual hi haurà 3 piràmides triangulars més petites.

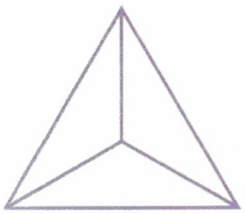
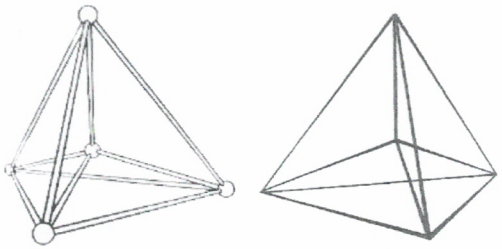


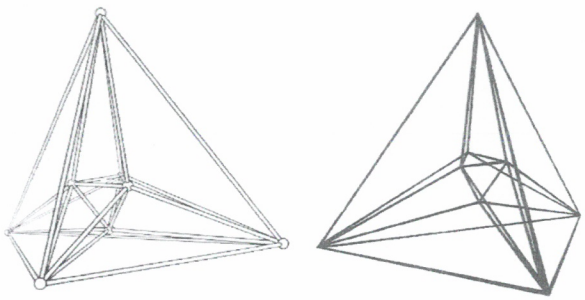
Diagrama d'Schlegel bidimensional d'un tetraedre tridimensional.



Diagrames d'Schlegel tridimensionals (dibuix en perspectiva) d'un 4-simplex quadridimensional.

Procedim a dibuixar el diagrama d'Schlegel d'un 16-cèl·lula. Per aquesta finalitat ens haurem de servir del diagrama d'Schlegel del seu anàleg tridimensional i que serà l'octaedre (l'octaedre és el dual del cub de la mateixa manera que el 16-cèl·lula és el dual de l'hipercub). Si ens fixem en el seu diagrama observarem com es tracta d'un triangle equilàter gran a l'interior del qual n'hi ha un altre de més petit i cap per avall. Adjacents a les arestes d'aquest hi trobem 3 triangles isòsceles que es dirigeixen als vèrtexs del triangle gran. Raonem per analogia i determinem que el diagrama d'Schlegel del politop 16-cèl·lula consistirà primerament en un tetraedre regular gran a l'interior del qual n'hi haurà un altre de més petit i girat. Adjacents a les cares planes d'aquest últim trobarem 3 piràmides de base triangular, la punta de les quals acabarà als vèrtexs del tetraedre gran exterior.

Diagrama d'Schlegel bidimensional d'un octaedre tridimensional.



Diagrames d'Schlegel tridimensionals (dibuix en perspectiva) d'un 16-cèl·lula quadridimensional.

Un altre politop que podem representar mitjançant un diagrama d'Schlegel és l'hipercub. De fet, el model extrusionat al qual ens referíem al segon apartat del treball és un diagrama d'Schlegel tridimensional d'un hipercub. El quadrat dins el quadrat que podem veure al model bidimensional esdevé un cub dins un altre cub més gran en el model tridimensional.

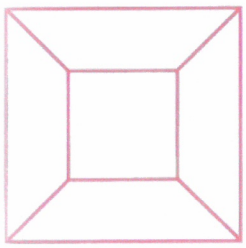


Diagrama d'Schlegel bidimensional d'un cub tridimensional.

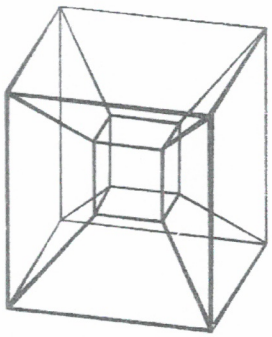
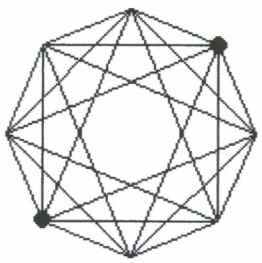


Diagrama d'Schlegel tridimensional (dibuix en perspectiva) d'un hipercub quadridimensional.

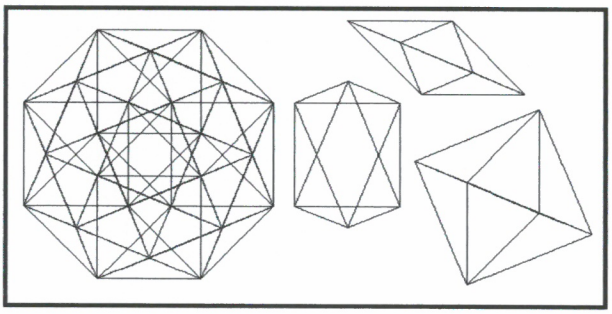
4.3.3. ALTRES PROJECCIONS DELS POLITOPS

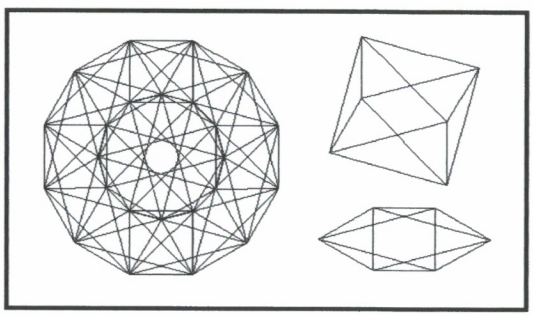
Tal com ja hem dit, els diagrames d'Schlegel només són útils per fer representacions dels politops més senzills ja que sinó esdevenen molt complicats d'interpretar. Així doncs el 24-cèl·lula, el 120-cèl·lula i el 600-cèl·lula els representarem mitjançant altres tipus de projeccions. Les més simples són aquelles que s'obtenen situant una font de llum darrera el politop i projectant la seva ombra sobre una superfície plana. Aquestes projeccions són complexes d'entendre i les presentem en aquest apartat a tall d'exemple tot i que no hi farem cap manipulació.

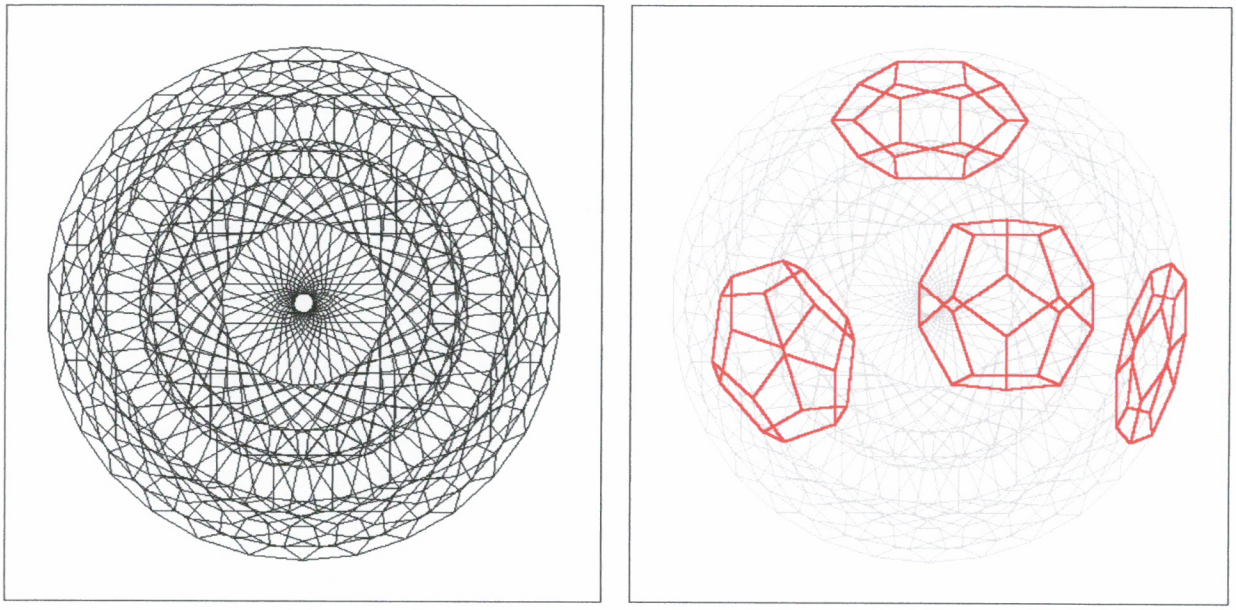


Projecció bidimensional del 16-cèl·lula

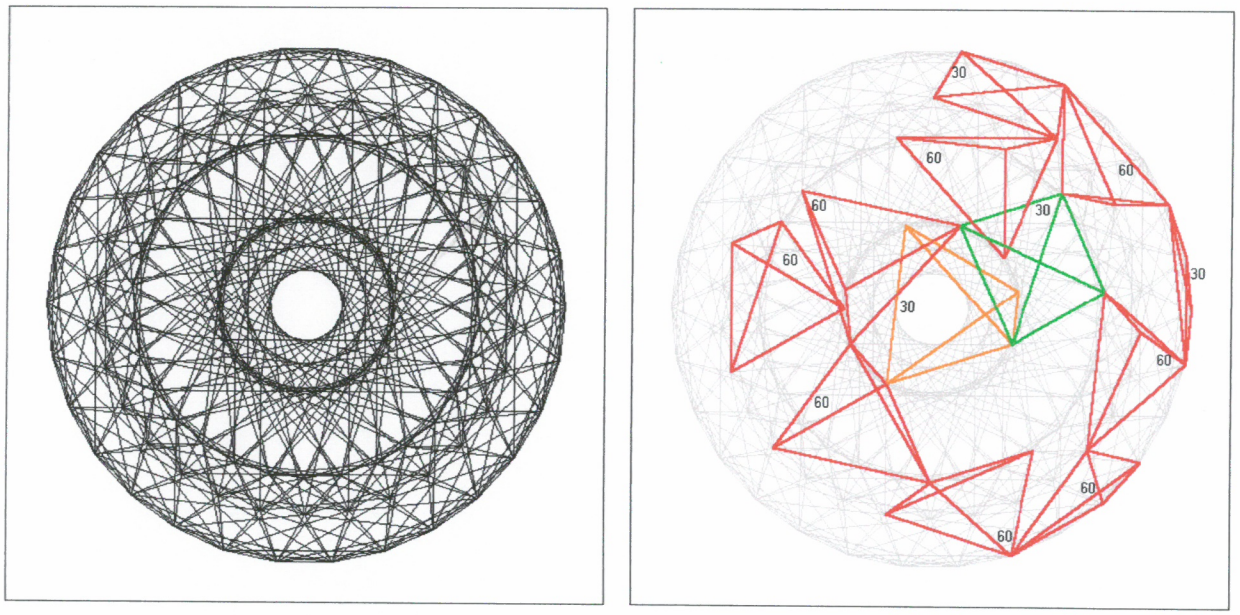
Dues projeccions bidimensionals d'un 24-cèl·lula. A la dreta de cada una podem observar alguns dels octaedres que constitueixen el politop.





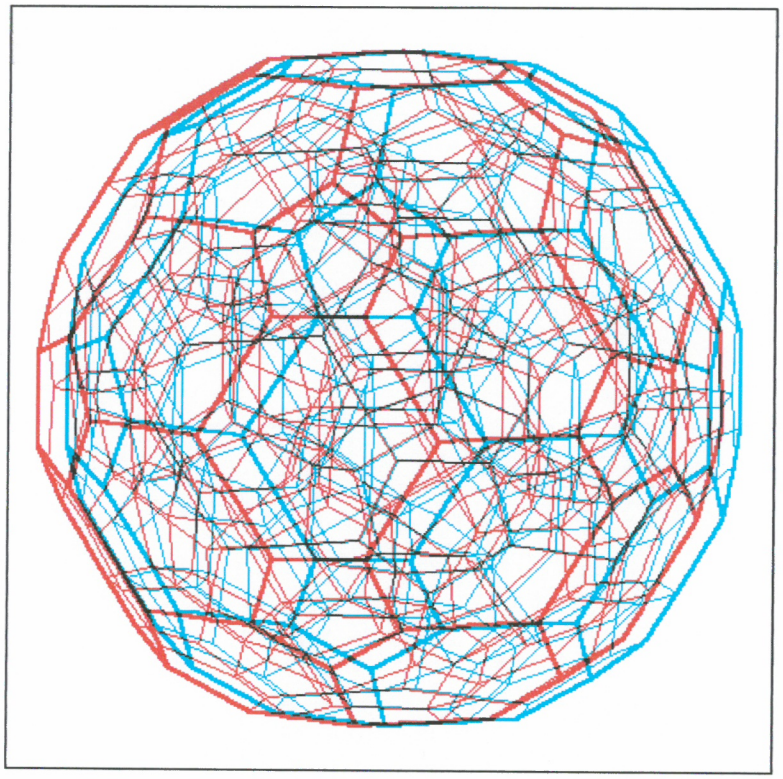


Dues projeccions bidimensionals d'un 120-cèl·lula. A la de la dreta podem observar la disposició d'alguns dels dodecaedres que el conformen.

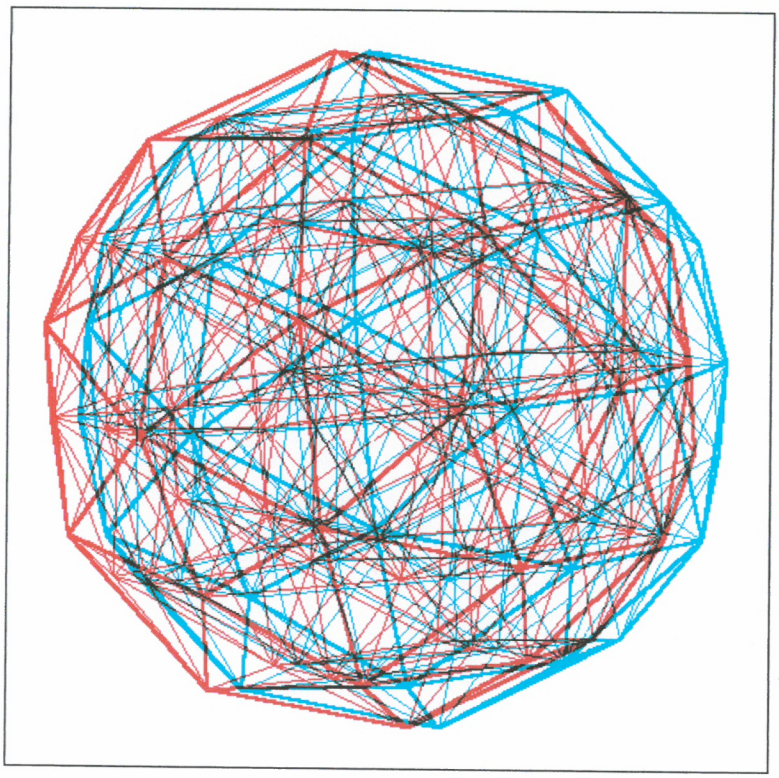


Dues projeccions bidimensionals d'un 600-cèl·lula. A la de la dreta podem observar la disposició d'alguns dels tetraedres que el conformen.

Com ja hem dit, les projeccions sobre el paper d'objectes quadridimensionals perden una gran quantitat d'informació. Una manera d'evitar parcialment aquest problema és utilitzant projeccions preparades per ser observades mitjançant ulleres bicolors (tècnica de l'anàglif), les quals proporcionen a l'observador una idea de relleu. Les imatges que presentem a continuació han estat concebudes per ésser estudiades mitjançant aquest tipus d'ulleres (proporcionades amb el treball) .



A l'esquerra observem la imatge d'un 120-cèl·lula constituït per dodecaedres. Tot i que a la seva superfície observem hexàgons, aquests són en realitat dodecaedres aixafats, la qual cosa vol dir que estan constituïts per 4 pentàgons que ocupen el mateix pla en la projecció. Tot i aquesta incongruència visual, aquest politop està format només per cèl·lules dodecaèdriques. El fet que es tracti d'una projecció ens obliga a deformar-lo.



La imatge de l'esquerra és la representació d'un 600-cèl·lula, constituït per 600 tetraedres regulars. Tot i que està pensada per aconseguir un efecte tridimensional en ser observada amb ulleres bicolors, resulta complexa d'interpretar degut al gran nombre de línies. El fet que sigui una projecció ens obliga a deformar les cèl·lules de manera que no les veiem com tetraedres regulars.

4.4. Figures regulars de més de 4 dimensions

Ara que ja hem vist quines figures regulars poden existir en un espai de 2, 3 i 4 dimensions, podem preguntar-nos quines podrem obtenir en dimensions superiors i quina quantitat n'hi trobarem. Aquesta pregunta té una solució molt concisa ja que en dimensions superiors a 4 només trobarem 3 figures que compleixin la condició de la regularitat. Podem fer una menció de cada una:

• En primer lloc, en qualsevol dimensió trobarem un **n-simplex** que serà regular. El procés que hem descrit anteriorment per trobar un 4-simplex es pot anar repetint successivament, sempre que hi hagi noves direccions (dimensions) en les quals puguem anar traçant línies perpendiculars a totes les anteriors. Les "cares" d'aquest n-simplex estaran constituïdes per (n-1)-simplexs i, en general, l'n-simplex es caracteritzarà per ser dual d'ell mateix.

• En espais de més de 4 dimensions també trobarem un anàleg del cub que anomenarem **n-cub**. Com ja hem dit, per obtenir un n-cub només cal "arrossegar" un (n-1)-cub cap a una altra direcció (dimensió). Així doncs, sempre podrem anar repetint aquest procés fins obtenir un cub de tantes dimensions com l'espai continent. A més, l'n-cub estarà format per "cares" que seran (n-1)-cubs.

• Per últim cal fer referència a la **n-figura dual de n-cub**. Si podem trobar un n-cub regular per a qualsevol dimensió, aquest ha de tenir una n-figura que sigui la seva dual. Com ja hem dit, el dual d'una figura regular també complirà la condició de la regularitat. Així doncs, per a qualsevol dimensió sempre trobarem també una tercera n-figura regular. En aquest cas, la n-figura estarà constituïda per "cares" que seran (n-1)-simplexs (aquests els obtindrem en unir els punts centrals dels (n-1)-cubs que conflueixin a cada un dels vèrtexs de l'n-cub).

Aquestes tres figures presentades a les línies anteriors seran les úniques que podrem construir en espais de dimensió superior a 4 que siguin regulars. En aquests espais no podrem obtenir cap altra figura que compleixi la condició de la regularitat.

4.5. Fórmula d'Euler per polígons, poliedres i politops

En aquest apartat estudiarem la fórmula d'Euler, aplicada a polígons, poliedres i politops. En primer lloc ens referirem al cas bidimensional, seguidament estudiarem el cas de 3 dimensions i finalment el de 4.

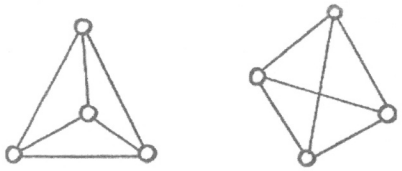
4.5.1. FÓRMULA D'EULER EN 2 DIMENSIONS

Per entendre la fórmula d'Euler primer és necessari familiaritzar-se una mica amb les xarxes. A l'espai bidimensional podem dibuixar un nombre n de punts i unir-los d'una determinada manera mitjançant arestes. A aquesta construcció l'anomenarem *xarxa* i estarà constituïda pels elements següents:

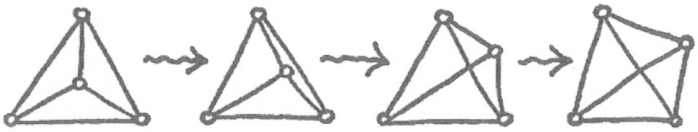
- un conjunt n, els elements del qual s'anomenaran *nodes* o *vèrtexs*

- una regla que especifiqui quan dos vèrtexs estan units entre sí

Vegem un exemple. A continuació podem observar dues xarxes, en les quals els vèrtexs hi són dibuixats com a circumferències buides i també observem les arestes que els uneixen.



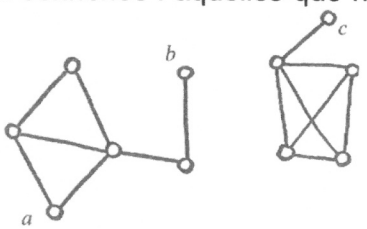
Si ens hi fixem detingudament observarem com en ambdues xarxes hi ha el mateix nombre de vèrtexs i com aquests estan connectats tots amb tots mitjançant arestes. Així doncs, podrem passar d'un diagrama a l'altre simplement movent els punts i les rectes d'un lloc a un altre tal com s'indica a continuació:



Així doncs, les dues figures que hem presentat representen la mateixa xarxa.

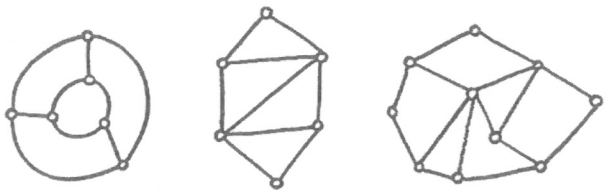
Ara que ja hem vist el què és una xarxa podem procedir a endinsar-nos-hi una mica més i introduir un altre concepte: el *camí*. En una determinada xarxa, un *camí* entre els vèrtexs a i b serà la successió d'arestes, començant a "a" i acabant a "b", tal que el final de cada aresta coincideixi amb el principi de l'aresta següent.

Cal destacar que les xarxes les podrem dividir en dos tipus: aquelles en les que dos punts qualsevols poden ser units per un camí i que anomenarem *connexes* i aquelles que no ho poden ser i que per tant anomenarem *inconnexes*. En el nostre cas només ens interessaran aquelles que siguin connexes. En aquest tipus de xarxes, el pla queda dividit en un nombre finit de regions, les quals podem anomenar *cares*. Així doncs, podem determinar que qualsevol xarxa que construïm a l'espai bidimensional es caracteritzarà per tenir un nombre concret de vèrtexs, arestes i cares. La fórmula d'Euler ens relacionarà aquests 3 nombres.



Exemple de xarxes inconnexes. El punt c no està unit al punt a o al punt b per cap camí.

Per trobar la relació que hi ha entre aquests tres valors primer caldrà comptar el nombre de cares (c), arestes (a) i vèrtexs (v) d'algunes figures. A continuació en presentem 3 a les quals ja els hem fet aquest recompte:



A B C

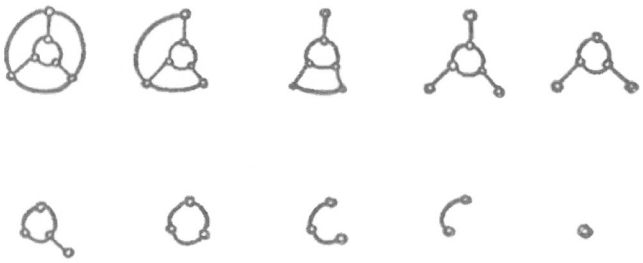
figura	c	a	v
A	4	9	6
B	4	9	6
C	6	15	10

Fet això podem intentar trobar una relació entre aquests tres nombres. En primer lloc podem dir que "a" sempre és el nombre més gran. La "c" i la "v" són més petits però la seva suma sempre dóna un resultat més gran que "a": 10, 10 16 a la taula anterior. Aquestes xifres són una unitat més grans que la "a" corresponent. Així doncs, sembla que:

$$c+v=a+1$$

$$v-a+c=1$$

Euler (707-783) fou el primer que provà que aquesta fórmula és certa per a qualsevol xarxa. Si dibuixem unes quantes xarxes més ens adonarem que sempre es compleix aquesta igualtat, la qual cosa significa que v-a+c sempre es manté constant. Existeixen diverses maneres que es compleixi això però n'hi ha dues que són més simples que les altres. La primera és que tant "a" com "c" decreixin una unitat. En aquest cas la seva diferència no canviarà, de manera que tampoc ho farà v-a+c. Una segona manera és que "v" i "a" disminueixin totes dues una unitat. La primera correspondria a eliminar una cara plana junt amb una aresta. La segona representaria suprimir un vèrtex junt amb una aresta. Aquestes dues situacions que hem descrit reben el nom de *col·lapses*. El que hem pogut observar és que v-a+c roman invariable en qualsevol tipus de col·lapse i, per tant, també en qualsevol successió de col·lapses. Vegem un exemple en el que efectuem una sèrie de col·lapses a una determinada figura:



Podem observar com a la figura inicial li hem aplicat una sèrie de col·lapses com els que hem descrit a dalt i que aquesta s'ha anat reduint sucessivament. No obstant l'expressió v-a+c no ha sofert cap mena d'alteració. Podem veure com després d'aplicar diversos col·lapses successius a la figura inicial aquesta se'ns ha reduït a un punt, constituït per 0 cares, 0 arestes i 1 vèrtex. De manera que per aquest cas v-a+c = 1-0-0 =1. Però com ja hem dit, v-a+c no canvia durant un col·lapse. Per tant, per la figura original també s'ha de complir que v-a+c =1.

Fet aquest experiment podem dir que qualsevol mapa pot sofrir una sèrie de col·lapses fins ser reduït a un punt sense que canviï v-a+c. Per un punt aquesta expressió val 1, per tant **v-a+c=1** és certa per a qualsevol xarxa bidimensional. Aquesta fórmula és coneguda com la fórmula d'Euler.

4.5.2. FÓRMULA D'EULER EN 3 DIMENSIONS

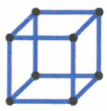
Ara que ja hem vist la fórmula d'Euler per mapes bidimensionals podem cercar si existeix una analogia de la fórmula que ens serveixi per a figures de 3 dimensions. En primer lloc farem un canvi en la notació. El vèrtexs, que abans anomenàvem "v", passarem a designar-los amb l'expressió c_0, les arestes amb c_1, les cares amb c_2, i els sòlids 3D amb c_3. Fet això podem agafar un cub i comptar els elements que el constitueixen. Així veurem que té 8 vèrtexs, 12 arestes, 6 cares i 1 cub. Mirant aquestes dades així com la fórmula d'Euler d'abans podem conjecturar-ne una per figures 3D:

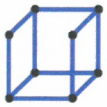
$$c_0 - c_1 + c_2 - c_3 = 1$$

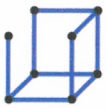
$$8 - 12 + 6 - 1 = 1$$

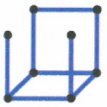
Podem veure com és vàlida per al cub. No obstant, per a demostrar-la hem de procedir a fer col·lapses. En aquesta ocasió col·lapsarem simultàniament un vèrtex i una aresta, o una aresta i una cara o una cara i un sòlid... i, en general, una m-cara i una (m+1)-cara. Vegem

el col·lapse d'un cub pas per pas. A la dreta de cada figura hi són comptabilitzats el nombre de vèrtexs (c_0), arestes (c_1), cares (c_2) i sòlids (c_3):

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

g) 

c_0	c_1	c_2	c_3
8	12	6	1
8	11	4	0
8	10	3	0
8	9	2	0
7	8	2	0
6	7	2	0
6	6	1	0

h) 

i) 

j) 

k) 

l)

m)

c_0	c_1	c_2	c_3
5	5	1	0
4	4	1	0
4	3	0	0
3	2	0	0
2	1	0	0
1	0	0	0

Fet això introduïm les dades a un full de càlcul per tal de verificar que $c_0-c_1+c_2-c_3$ sempre pren valor 1:

Etapa del cub	*c0*	*c1*	*c2*	*c3*	*c0-c1+c2-c3=*
a	8	12	6	1	1
b	8	11	4	0	1
c	8	10	3	0	1
d	8	9	2	0	1

e	7	8	2	0	1
f	6	7	2	0	1
g	6	6	1	0	1
h	5	5	1	0	1
i	4	4	1	0	1
j	4	3	0	0	1
k	3	2	0	0	1
l	2	1	0	0	1
m	1	0	0	0	1

Efectivament, durant la successió de col·lapses aplicats al cub, c_0-c_1+c_2-c_3 roman inalterable. El procés finalitza amb el punt, moment en el qual l'expressió anterior val 1. Per tant, **c_0-c_1+c_2-c_3=1** és vàlida per a qualsevol figura tridimensional.

4.5.3. FÓRMULA D'EULER EN 4 DIMENSIONS

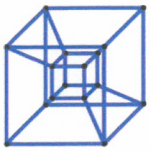
Estudiat el cas tridimensional podem procedir a estudiar el de 4 dimensions. Per a aquesta finalitat emprarem una de les figures quadridimensionals més tractades en aquest treball: l'hipercub. Com que aquest té 4 dimensions i no el podem construir realment emprarem una de les seves projeccions. En concret hem escollit la "projecció central" de l'hipercub.
Si ens hi fixem detingudament podrem veure com aquest està constituït per 16 vèrtexs, 32 arestes, 24 cares, 8 cubs i 1 hipercub. Tenint en compte aquestes dades així com les fórmules trobades per dimensions inferiors podem fer una primera conjectura de la fórmula d'Euler per figures quadridimensionals:

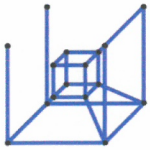
$$c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + c_4 = 1$$

$$16 - 32 + 24 - 8 + 1 = 1$$

Per l'hipercub es compleix la fórmula però si volem demostrar-la serà necessari procedir a fer col·lapses tal com ho hem fet abans. En aquest cas hi poden haver diverses opcions per col·lapsar, no obstant les més fàcils seran eliminar un vèrtex i una aresta alhora, una aresta i una cara, una cara i un sòlid o bé un sòlid amb un hipersòlid de 4 dimensions.

El procés que cal seguir per col·lapsar un hipercub és molt llarg degut al gran nombre de figures que l'integren. Per aquest motiu primer presentem els diagrames que mostren els diferents col·lapses i després fem un recompte del nombre de figures que integren cada etapa. Els resultats són presentats en una taula a sota, en la qual també es comprova que c_0-c_1+c_2-c_3+c_4 es manté constant durant tots els col·lapses. Cal indicar també que en alguns dels diagrames no s'observa del tot bé quins elements desapareixen doncs alguns d'ells queden superposats. Mitjançant les dades de la taula es pot resoldre qualsevol ambigüitat visual.

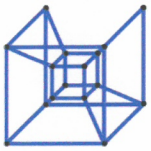
a) 

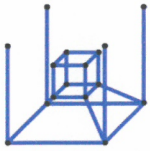
h) 

o) 

v) 

ac)

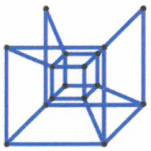
b) 

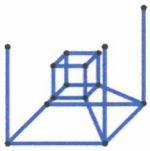
i) 

p) 

w) 

ad)

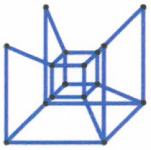
c) 

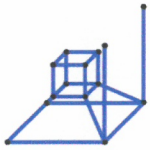
j) 

q) 

x) 

ae)

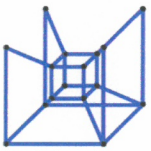
d) 

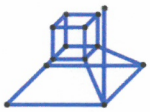
k) 

r) 

y) 

af)

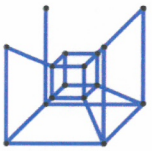
e) 

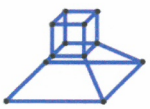
l) 

s) 

z) 

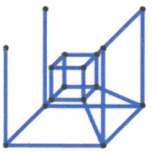
ag)

f) 

m) 

t) 

aa) 

g) 

n) 

u) 

ab) 

Etapa de l'hipercub	*c0*	*c1*	*c2*	*c3*	*c4*	*c0-c1+c2-c3+c4=*
a	16	32	24	8	1	1
b	16	31	21	5	0	1
c	16	30	19	4	0	1
d	16	29	17	3	0	1

e	16	28	15	2	0	1
f	16	27	14	2	0	1
g	16	26	13	2	0	1
h	16	25	12	2	0	1
i	16	24	11	2	0	1
j	15	23	11	2	0	1
k	14	22	11	2	0	1
l	13	21	11	2	0	1
m	12	20	11	2	0	1
n	12	19	9	1	0	1
o	12	18	8	1	0	1
p	12	17	7	1	0	1
q	12	16	6	1	0	1
r	11	15	6	1	0	1
s	10	14	6	1	0	1
t	9	13	6	1	0	1
u	8	12	6	1	0	1
v	8	11	4	0	0	1
w	8	10	3	0	0	1
x	8	9	2	0	0	1
y	8	8	1	0	0	1
z	7	7	1	0	0	1
aa	6	6	1	0	0	1
ab	5	5	1	0	0	1
ac	4	4	1	0	0	1
ad	4	3	0	0	0	1
ae	3	2	0	0	0	1
af	2	1	0	0	0	1
ag	1	0	0	0	0	1

Mitjançant aquesta taula podem veure com c_0-c_1+c_2-c_3+c_4 es manté constant durant tots els col·lapses. A més, observem com l'hipercub s'acaba reduint a un punt, format per 1 vèrtex, 0 arestes, 0 cares, 0 cubs i 0 hipercubs. En aquest instant, doncs, c_0-c_1+c_2-c_3+c_4=1 i, com que c_0-c_1+c_2-c_3+c_4 és constant ja tenim la fórmula d'Euler per figures de 4 dimensions:

$$c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + c_4 = 1$$

4.5.4. FÓRMULA D'EULER PER FIGURES DE MÉS DE 4 DIMENSIONS

A les línies anteriors hem demostrat la fórmula d'Euler per figures de 2, 3 i 4 dimensions. Per aquelles que tinguin més dimensions també existeix la seva fórmula d'Euler corresponent. Aquesta generalització de la fórmula la dugué a terme un matemàtic francès anomenat Poincaré (1854-1912) i per aquest motiu és coneguda com la fórmula d'Euler-Poincaré.
Aquesta fórmula generalitzada és més complexa de demostrar i per aquest motiu només en comprovarem la seva validesa amb cubs de fins a 10 dimensions. Per aquesta finalitat recuperarem les dades de la taula que hem presentat a l'apartat de l'hipercub en la que s'havien calculat el nombre de r-cares que constituïen diversos n-cubs. Comencem referint-nos al cas de 5 dimensions.

dimensió del n-cub	nombre de cares de r dimensions										
	r=0	r=1	r=2	r=3	r=4	r=5	r=6	r=7	r=8	r=9	r=10
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	4	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	8	12	6	1	0	0	0	0	0	0	0
4	16	32	24	8	1	0	0	0	0	0	0
5	32	80	80	40	10	1	0	0	0	0	0
6	64	192	240	160	60	12	1	0	0	0	0
7	128	448	672	560	280	84	14	1	0	0	0
8	256	1024	1792	1792	1120	448	112	16	1	0	0
9	512	2304	4608	5376	4032	2016	672	144	18	1	0
10	1024	5120	11520	15360	13440	8064	3360	960	180	20	1

• 5-figures

- Fórmula per figures de 5 dimensions:

$$c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + c_4 - c_5 = 1$$

- Comprovació de la fórmula amb un 5-cub:

$$32 - 80 + 80 - 40 + 10 - 1 = 1$$

• 6-figures

- Fórmula per figures de 6 dimensions:

$$c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + c_4 - c_5 + c_6 = 1$$

- Comprovació de la fórmula amb un 6-cub:

$$64 - 192 + 240 - 160 + 60 - 12 + 1 = 1$$

• 7-figures

- Fórmula per figures de 7 dimensions:

$$c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + c_4 - c_5 + c_6 - c_7 = 1$$

- Comprovació de la fórmula amb un 7-cub:

$$128 - 448 + 672 - 560 + 280 - 84 + 14 - 1 = 1$$

• 8-figures

- Fórmula per figures de 8 dimensions:

$$c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + c_4 - c_5 + c_6 - c_7 + c_8 = 1$$

- Comprovació de la fórmula amb un 8-cub:

$$256 - 1024 + 1792 - 1792 + 1120 - 448 + 112 - 16 + 1 = 1$$

• 9-figures

- Fórmula per figures de 9 dimensions:

$$c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + c_4 - c_5 + c_6 - c_7 + c_8 - c_9 = 1$$

- Comprovació de la fórmula amb un 9-cub:

$$512 - 2304 + 4608 - 5376 + 4032 - 2016 + 672 - 144 + 18 - 1 = 1$$

• 10-figures

- Fórmula per figures de 10 dimensions:

$$c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + c_4 - c_5 + c_6 - c_7 + c_8 - c_9 + c_{10} = 1$$

- Comprovació de la fórmula amb un 10-cub:

$$1024 - 5120 + 11520 - 15360 + 13440 - 8064 + 3360 - 960 + 180 - 20 + 1 = 1$$

Amb aquestes comprovacions podem veure com la fórmula és extrapol·lable per a qualsevol dimensió. Observem com cada cop que augmentem una dimensió apareix una nova variable a la fórmula, que és el nombre de n-cares que té la n-figura (i que per tant sempre val 1), el qual es troba sumant o restant segons el signe de la variable anterior (podem observar com els signes són de suma i de resta alternats successivament).
Cal apuntar també que existeix una altra versió de la fórmula d'Euler-Poincaré, en la qual el nombre de n-cares que té la n-figura no hi són comptats. En aquest cas la fórmula no s'igualarà a 1 sinó que ho farà a 0 en el cas que n sigui un nombre parell o a 2 si n és imparell. Hem optat per treballar amb la primera versió perquè proporciona més homogeneïtat al procés.

Un cop acabat el treball de recerca, podem sintetitzar algunes de les conclusions que hem extret a partir de l'elaboració d'aquest. El present projecte tenia com a objectiu fer un estudi de la quarta dimensió així com de les figures més representatives que podem trobar en un espai quadridimensional. En els casos que ha esdevingut possible hem intentat generalitzar les fórmules per poder estudiar resultats corresponents a dimensions superiors i d'aquesta manera fer-nos una idea més global del concepte de dimensionalitat.
Degut a l'ampli abast temàtic del treball hem decidit separar les conclusions obtingudes i organitzar-les en diferents apartats per tal de fer-ne més fàcil la seva comprensió. Val a dir que a continuació també hi hem inclòs les conclusions corresponents als diferents annexos per tal de crear un bloc més homogeni.

• Concepte de dimensions superiors

→ L'espai on vivim té només 3 dimensions. La naturalesa del nostre univers ens impedeix desplaçar-nos cap una quarta direcció (només tenim 3 graus de llibertat) i aquesta ni tant sols la podem imaginar. No obstant, podem comprendre el significat d'una quarta dimensió si raonem per analogia. Si identifiquem la nostra situació amb la d'un ésser bidimensional que intenta comprendre una tercera situació podrem extrapolar els resultats i deduir propietats de l'espai de 4 dimensions.

→ Els punts de l'espai de 4 dimensions estan localitzats mitjançant 4 coordenades (una per cada un dels eixos que podem situar en aquest espai). I a l'inrevés, per situar 4 valors en un sistema d'eixos ens farà falta un espai amb 4 dimensions per poder-li fer cabre. Les fórmules bàsiques emprades en geometria analítica tridimensional són fàcils de generalitzar per quatre dimensions i per tant, l'estudi analític d'espais de n dimensions des d'un punt de vista estrictament algebraic no comporta cap complicació.

→ L'existència de dimensions superiors és incerta. De moment no s'ha pogut demostrar l'existència directa d'aquestes. No obstant això, la física moderna experimenta una simplificació significativa dels seus arguments si considerem la seva existència. Sembla ser que els tres graus de llibertat que coneixem no són suficients per explicar la realitat física del nostre univers.

• Figures de dimensions superiors: l'hipercub i l'n-cub

→ Tot i no saber si existeixen dimensions superiors i ni tan sols poder-hi interactuar, sí que podem imaginar quin seria el procés que s'hauria de seguir per obtenir figures de 4 dimensions anàlogues a d'altres que ja existeixen a l'espai tridimensional. Una de les més simples és la del cub de 4 dimensions o hipercub.

→ Degut a les 4 dimensions que té l'hipercub, aquest no el podem construir al nostre espai. Enlloc d'això sí que és possible el seu estudi utilitzant-ne models tridimensionals. En el present projecte se n'han estudiat 3.

→ És possible estudiar la geometria d'un cub de quatre dimensions mitjançant dues tècniques:

- Emprant les projeccions d'aquest a l'espai tridimensional
- Utilitzant les seves seccions tridimensionals

Tal com ja hem explicat, tant les projeccions com les seccions 3D de l'hipercub mantenen una relació analògica estreta amb les projeccions i seccions bidimensionals d'un cub.

→ L'estudi analític de l'hipercub és pot dur a terme de manera simple amb tècniques de geometria analítica. D'aquesta manera podem calcular magnituds com el seu volum, o la longitud de les seves diagonals.

→ És possible estudiar les figures de diferents dimensions que conformen l'hipercub. Aquest estudi és relativament simple si el fem amb una projecció 3D de l'hipercub. No obstant, amb cubs de dimensió superior, les seves projeccions esdevenen molt complexes d'interpretar. En lloc d'això és possible deduir una fórmula que ens permeti calcular directament el nombre de r-cares que té un cub de n-dimensions. Aquesta fórmula també ens permet lligar el nombre de r-cares d'un n-cub amb l'expansió d'un determinat binomi elevat a una determinada potència.

• **Figures de dimensions superiors: la hiperesfera i la n-esfera**

→ Si ens atenem a la definició de circumferència i esfera, podem definir com seria una esfera de 4 dimensions o hiperesfera.

→ És possible estudiar la seva geometria utilitzant les seccions tridimensionals que obtenim quan aquesta travessa l'espai 3D.

→ També podem trobar una fórmula que ens permeti calcular l'hipervolum d'una hiperesfera 4D. Per a obtenir tal fórmula ens hem de basar en el concepte de secció i emprar el mètode de la integració. De la mateixa manera podem deduir una fórmula que ens permeti calcular l'n-volum d'una esfera de n dimensions.

→ Obtinguda la fórmula que ens permeti calcular l'n-volum de n-esferes podem computar-la i obtenir així els valors d'n-volum que correspondrien a diferents n-esferes amb un radi concret. Estudiant els resultats podem concloure que quan el nombre de dimensions d'una n-esfera és molt gran, l'n-volum d'aquesta tendeix a aproximar-se a 0. A més, una n-esfera de radi donat assoleix un n-volum màxim per un valor de n (dimensió) concret. Si augmentem el radi, el màxim n-volum l'aconseguirem a dimensions majors. Si el radi disminueix, l'n-volum màxim caldrà cercar-lo a dimensions més petites.

→ Cal destacar també que gràficament hem pogut comprovar com el volum màxim d'una n-esfera de radi 1 no s'obté a la dimensió 2e tal com suggeria un article matemàtic citat, sinó que aquest se situa en una dimensió el valor de la qual és lleugerament inferior.

• **Altres figures regulars de dimensions superiors**

→ El nombre de figures regulars que podem construir en un espai de n dimensions varia segons quin sigui el valor de n. Així, a l'espai bidimensional podem construir un nombre infinit de figures regulars planes (polígons regulars). En l'espai tridimensional, en canvi, només existeixen 5 figures que siguin regulars (poliedres regulars). A l'espai de 4 dimensions hi podrem construir 6 figures quadridimensionals regulars i que anomenarem politops regulars:

- 4-simplex
- hipercub
- 16-cèl·lula

- 24-cèl·lula
- 120-cèl·lula
- 600-cèl·lula

En canvi a partir de la dimensió 5 només podrem construir 3 figures regulars a cada dimensió.

→ Tenint en compte aquestes últimes consideracions podem determinar que l'espai de 4 dimensions és aquell que més regularitat geomètrica té després del de dues.
Deixant a part el cas bidimensional (en què el nombre de polígons regulars construïbles és infinit), l'espai 4D és aquell en el qual més quantitat de figures regulars podem construir.

→ És possible generalitzar la fórmula d'Euler per poliedres de més de 3 dimensions. Podem dur a terme una verificació de la fórmula per figures de 4 dimensions aplicant una sèrie de col·lapses a una projecció tridimensional de l'hipercub. Podem apuntar també cap a una generalització d'aquesta.

→ De la mateixa manera que hem pogut trobar una fórmula per calcular el nombre de r-cares que té un n-cub, podem seguir un procés similar per trobar-ne una altra amb la mateixa funció però aplicable a l'n-simplex. Igualment podrem relacionar els resultats amb l'expansió d'un determinat binomi.

• **Altres conclusions**

→ L'estudi de dimensions superiors se simplifica notòriament si s'utilitzen mitjans informàtics. En aquest treball hem pogut veure com podíem estudiar de manera molt visual la geometria dels diferents politops mitjançant petits applets java.

→ El tema de la quarta dimensió esdevingué relativament popular a partir del segle XIX. Podem trobar diferents artistes que en algun moment de la seva vida s'hi ha referit (com és el cas de Salvador Dalí) i d'altres que han basat íntegrament la seva obra a aquesta temàtica (com Tony Robbin). A més d'art, arquitectura i escultura, la quarta dimensió s'ha propagat per molts àmbits no científics i s'hi troben referències a la literatura, al cine o fins i tot a la religió.

• **Conclusions personals**

Des d'un punt de vista personal he de dir que la realització d'aquest treball ha estat una tasca molt interessant i enriquidora. M'ha ajudat a eixamplar el meu ventall de coneixements sobretot en l'àmbit matemàtic. A més, l'experiència de crear un projecte des de zero i recopilar i classificar un gran volum d'informació m'ha servit per descobrir nous mètodes d'organització de dades i per aprendre a manipular-les. La redacció del cos no ha estat absenta de dificultats, sobretot aquelles parts la font d'informació de les quals estava en un altre idioma que no fos català o castellà. Tot i això, l'estudi ha valgut molt la pena i he passat bons moments creant aquest projecte, doncs a mesura que m'hi he anat endinsant l'he anat veient cada vegada més clar. Abans de començar a crear aquest treball se'm feia estrany escriure "quarta dimensió". A hores d'ara se'm fa difícil resistir-me a pensar en la cinquena.

4th. DIMENSION WEB PAGES. *Some notes on the Fourth Dimension* [en línia]. < http://www.math.union.edu/~dpvc/math/4D/> [consulta: 01.08.2005].

ABBOTT, Edwin A. *Planilandia: una novela de muchas dimensiones.* Palma de Mallorca: El Barquero, 2004. ISBN: 84-7651-781-5

BANCHOFF, Thomas. *Beyond the third dimension.* New York: Scientific American Library, 1990. ISBN: 0-7167-5025-2

BANCHOFF, Thomas. *On-Line Mathematics* [en línia]. <http://www.math.brown.edu/TFBCON2003/mathematics/welcome.html> [consulta: 22.09.2005].

BANCHOFF, Thomas. *The Hypercube: Projections and Slicing* [en línia]. < http://www.math.union.edu/~dpvc/TFB/ICMS-poster/hcube/welcome.html> [consulta: 20.09.2005].

BANCHOFF, Thomas. *Thomas Banchoff* [en línia]. < http://www.math.brown.edu/~banchoff/> [consulta: 20.09.2005].

BANCHOFF, Thomas; CERVONE, Davide P. "Illustrating Beyond the Third Dimension". *The Visual Mind – Art and Mathematics.* Massachusetts: MIT Press, 1994. p. 85-92.

BERLINGHOFF, William P.; GRANT, Kerry E. *A Mathematics Sampler.* New York: Ardsley House Publishers, 1988-1992. ISBN: 1-880157-02-0

BRECHER, Erwin. "The Mystery of the Fourth Dimension". *Journey through Puzzleland.* London: Pan Books, 1994. p. 143-153.

BREUER, Miles J. "Puerta a la cuarta dimensión". *Cacumen, revista lúdica de cavilaciones.* Zugarto Ediciones. Juny 1983, núm. 6, p. 14-21.

BRIDGES, Sean. *4D Tic Tac Toe* [en línia]. <http://www.geocities.com/ResearchTriangle/System/3517/tictac4d/tictac4d.html > [consulta: 02.10.2005].

BUJOSA, J.M. i altres. *Matemàtiques 2.* Barcelona: Castellnou Edicions, 2003. ISBN: 84-8287-948-0

CERVONE, Davide P. *Beyond the Third Dimension* [en línia]. <http://alem3d.obidos.org/en/cubeice/movsl4> [consulta: 11.06.2005].

COHEN, Gilles. "De la quatrième dimension au cubisme". *Maths et arts plastiques".* Biblioteca Tangente, HS-23.

Collins Diccionario Espanyol-Inglés English-Spanish. Barcelona: Grijalbo Mondadori, 2000. ISBN: 0-06-095691-7

Construction of the Hyper-Dodecahedron [en línia]. <http://www.theory.org/geotopo/120-cell> [consulta: 23.06. 2005].

COXETER, H.S.M. *Fundamentos de geometría.* México: Editorial Limusa-Wiley, 1971.

COXETER, H.S.M. *Regular Polytopes.* New York: Dover Publications, 1973. ISBN: 0-486-61480-8

Cuerpos Sólidos [en línia]. <http://www.cnice.mecd.es/eos/MaterialesEducativos/mem2000/matefoto/libro/ayuda3.htm> [consulta: 24.06. 2005].

CUT THE KNOT. *The Tesseract* [en línia]. < http://www.cut-the-knot.org/ctk/Tesseract.shtml> [consulta: 10.06.2005].

Diccionari Enciclopèdic. Barcelona: Enciclopèdia Catalana, 1984. ISBN: 84-85194-53-5

Diccionari Oxford Pocket Català. Willis, Judith (ed. lit.). Oxford: Oxford University Press, 1997. ISBN: 0 19 431314 X

Dimensió Dalí [DVD]. Barcelona: Media 3.14 (MEDIA), 2004. 53 min.

ESCHER, M.C. *Estampas i dibujos.* Köln: Evergreen, 1994. ISBN: 3-8228-0678-1

FERRANDO i PASCUAL, Emili i altres. *Diccionari de la llengua catalana.* Barcelona: Enciclopèdia Catalana, 1994. ISBN: 84-7739-754-6

GARDNER, Martin. "Capítulo VI: La iglesia de la Cuarta Dimensión". *El ahorcamiento inesperado y otros entretenimientos matemáticos.* Madrid: Alianza Editorial, 1991. p. 83-97.

GARDNER, Martin. "Capítulo XII: Tierrasplanas". *El ahorcamiento inesperado y otros entretenimientos matemáticos.* Madrid: Alianza Editorial, 1991. p. 182-196.

GOWERS, Timothy. "Chapter 5: Dimension". *Mathematics: A very short introduction.* Oxford: Oxford University Press, 2002. p. 70-85.

Gramàtica catalana i manual de sinònims. Barcelona: Vox Biliograf, 1973. ISBN: 84-7153-329-4

Gran Larousse Català. Barcelona: Edicions 62, 1990. ISBN: 84-297-3088-5

GRIFFITHS, Martin. "n-dimensional enrichment for Further Mathematicians". *The Mathematical Gazette.* Novembre 2005, vol. 89, p. 409-416.

HAWKING, Stephen W. *Història del temps: del big bang als forats negres.* Barcelona: Columna Edicions, 1988. ISBN: 84-664-0183-0

HEISERMAN, David L. *Experiments in four dimensions.* Blue Ridge Summit: Tab Books, 1983. ISBN: 0-8306-0141-4

HENRY, Boyd. "The fourth dimension and beyond with a surprise ending". *The mathematics teacher.* Març 1974, vol. 67, núm. 3, p. 274-279.

Hypercube: Projections and Slicing [DVD]. Providence: Banchoff/Strauss Productions, 1878. 9,5 min.

Hyperspace [en línia]. <http://users.adelphia.net/~eswab/hyprspac.html> [consulta: 22.06. 2005].

JONES, Garrett. *Four-Dimension Tetraspace* [en línia]. < http://tetraspace.alkaline.org/> [consulta: 11.08.2005].

KAKU, Michio. *Hiperespacio.* Barcelona: Grijalbo Mondadori, 1996. ISBN: 84-7423-747-5

KÖLLER, Jürgen. *Hypercube, Tesseract* [en línia]. < http://www.mathematische-basteleien. de/hypercube.htm> [consulta: 02.08.2005].

Magic Cube 4D [en línia]. <http://www.geocities.com/ ResearchTriangle/System/3517/ tictac4d/tictac4d.html > [consulta: 03.11.2005].

MATHWORLD. *Four-Dimensional Geometry* [en línia]. < http://mathworld.wolfram.com/ topics/Four-DimensionalGeometry.html> [consulta: 10.07.2005].

MATHWORLD. *Hypersphere* [en línia]. <http://mathworld.wolfram.com/Hypersphere.html> [consulta: 10.07.2005].

MATHWORLD. *Platonic Solid* [en línia]. < http://mathworld.wolfram.com/PlatonicSolid.html> [consulta: 10.07.2005].

NEWBOLD, Mark. *Hyperspace Star Polytope Slicer* [en línia]. < http://dogfeathers.com/java/ hyperstar.html> [consulta: 27.06.2005].

NEWBOLD, Mark. *Mark Newbold's Java Stuff* [en línia]. < http://dogfeathers.com/java/index. html> [consulta: 27.06.2005].

NEWBOLD, Mark. *Stereoscopic Animated 24-cell object* [en línia]. <http://dogfeathers.com /java/cell24.html > [consulta: 27.06.2005].

NEWBOLD, Mark. *Stereoscopic Animated Cross-Polytope* [en línia]. < http://dogfeathers. com/java/crosspoly.html> [consulta: 27.06.2005].

NEWBOLD, Mark. *Stereoscopic Animated Hypercube* [en línia]. < http://dogfeathers.com/ java/hyprcube.html> [consulta: 27.06.2005].

NEWBOLD, Mark. *Stereoscopic Animated Simplex Object* [en línia]. < http://dogfeathers. com/java/simplex.html> [consulta: 27.06.2005].

NIEDERMANN, Hans Ulrico. *N-dimensional cubes* [en línia]. < http://n-dimensional.de/ cubes/ > [consulta: 02.09.2005].

PICKOVER, Clifford A. *Surfing Through Hyperspace.* New York: Oxford University Press, 1999. ISBN: 0-19-513006-5

ROBBIN, Tony. *Fourfield: Computers, Art and the 4th Dimension.* Boston: A Bulfinch Press Book Little, Brown and Company, 1992. ISBN: 0-8212-1909-X

ROWLAND, Eric S. *Regular Polytopes* [en línia]. <http://www.math.rutgers.edu/~erowland/polytopes.html> [consulta: 24.06. 2005].

RUCKER, Rudy. *La cuarta dimensión.* Barcelona: Salvat Editores, 1987. ISBN: 84-345-8246-5

RUCKER, Rudy. *Rudy Rucker's Home Page* [en línia]. < http://www.mathcs.sjsu.edu/faculty/rucker/index.html> [consulta: 20.06.2005].

SALAT, Jordi; LLEONART, Jordi. "Les esferes llunyanes". *L'escaire.* Gener 1985, núm. 13, p. 52-55.

SALTSMAN, Eric. *The Fourth Dimension* [en línia]. < http://www.geocities.com/Cape Canaveral/7997/> [consulta: 01.08.2005].

SIMONSON, Roberta. "The Fourth Dimension and Beyond". *NCTM Projects to Enrich School Mathematics: Level 3.* Reston, VA: NCTM. p. 8-10.

STEWART, Ian. *Conceptos de matemàtica moderna.* Madrid: Alianza Editorial, 1977. ISBN: 84-206-2187-0

STRAFFIN, Philip. "Volumes and hypervolumes". *Applications of Calculus.* Washington: Mathematical Association of America, 1993. p. 137-149.

THE ENCYCLOPEDIA OF ASTROBIOLOGY ASTRONOMY AND SPACEFLIGHT. *Fourth Dimension* [en línia]. < http://www.daviddarling.info/encyclopedia/F/fourth_dimension.html> [consulta: 2.08.2005].

The Fourth Dimension Simply Explained. Manning, Henry P. (ed. lit.). Mineola: Dover Publications, 2005. ISBN: 0-486-43889-9

THE GEOMETRY CENTER. *The Topological Zoo* [en línia]. <http://www.geom.uiuc.edu/zoo/> [consulta: 10.06.2005].

URIBE, Diego. "El generalizador (I)". *Cacumen, ingenio, juegos y humor.* Zugarto Ediciones. Juny 1986, núm. 41, p. 14-18.

URIBE, Diego. "El generalizador (II)". *Cacumen, ingenio, juegos y humor.* Zugarto Ediciones. Juliol 1986, núm. 42, p. 14-20.

AHEAD SOFTWARE AG. *Nero Express v. 6.6.0.8* [programa informàtic per a Windows]. Ahead Software AG, 1995-2004.

ARTIXMEDIA. *ArtixMedia Menu Studio 3.5* [programa informàtic per a Windows]. ArtixMedia, 1999-2003.

COREL CORPORATION. *Corel Draw Graphics Suite 12: Corel Draw 12* [programa informàtic per a Windows]. Corel Corporation, 2003.

COREL CORPORATION. *Corel Draw Graphics Suite 12: Corel Photo-Paint 12* [programa informàtic per a Windows]. Corel Corporation, 2003.

DESIGN SCIENCE. *MathType v. 5.2c* [programa informàtic per a Windows]. Design Science, 1990-2004.

MICROSOFT. *Microsoft Office Professional Edition 2003: Microsoft Office Word 2003* [programa informàtic per a Windows]. Microsoft Corporation, 1983-2003.

MICROSOFT. *Microsoft Office Professional Edition 2003: Microsoft Office Excel 2003* [programa informàtic per a Windows]. Microsoft Corporation, 1983-2003.

TEXAS INSTRUMENTS. *Derive 6* [programa informàtic per a Windows]. Texas Instruments Incorporated, 1988-2003.

A-1.1. Document audiovisual: "*Hypercube: projections and Slicing*"

Al llarg del present treball hem utilitzat diversos vídeos i animacions gràfiques per fer més entenedors els conceptes sobre els quals hem tractat. La possibilitat de veure imatges en moviment de determinades figures i objectes ens facilita molt la comprensió de la seva geometria i ens la permet estudiar d'una manera molt més intuïtiva i amena.
Pel que fa al tema de la quarta dimensió, un dels primers documents audiovisuals que tractà sobre aquest fou "*Hypercube: Projections and Slicing*". Aquest documental, d'uns 9 minuts de durada, fou creat pel professor de la universitat de Brown, Thomas Banchoff i pel seu col·laborador Charles Strauss el 1978. Tot i tenir més de 25 anys d'antiguitat, es tracta d'un document amb un valor científic immens i que s'anticipà molt a la seva època ja que utilitzà tècniques de modelat tridimensional per ordinador que tot just començaven a introduir-se als anys 70. És per això que hem decidit afegir aquest document al treball, ja que creiem que complementa de manera molt clara l'estudi de la quarta dimensió i aclareix molts del conceptes explicats.
El document, que està complementat amb diverses explicacions que fa l'autor durant el seu transcurs, fou creat íntegrament en anglès. Per facilitar-ne l'entesa a persones amb pocs coneixements d'aquesta llengua, el document ha estat transcrit, traduït i subtitulat al català. La versió que es pot trobar al disc del treball està íntegrament subtitulada al català i a més conserva les explicacions originals de l'autor.

>A-1.1. Hypercube: Projections and Slicing

A-1.2. Transcripció i traducció del contingut

Com ja hem dit, el document ha hagut de passar per un procés de transcripció i traducció abans de poder ser subtitulat. A continuació presentem el text original en anglès i la seva traducció al català. Ambdós documents són molt útils per a comprendre millor el documental:

Transcripció original:
"HYPERCUBE: PROJECTIONS AND SLICING"

We start with a square. Which is really a head-on view of a cube which begins to rotate. Our first impression of a rotating 3-cube is that of squares sliding. This is the revolving door illusion. If we rotate de 3 dimensional cube about a different axis we get parallelograms and rectangles, images that we readily interpret as the shadows of a rotating 3 dimensional cube. But now we rotate in four dimensional space. Our first view of a rotating four dimensional cube gives us the impression of three dimensional cubes sliding. The revolving door illusion in one higher dimension. If we stop the four dimensional rotation and revolve around an axis in three space we get something which resembles a wire-frame model like the frame of a box cape. But now we rotate in a different plane in four dimensional space. This is our first really good view of a four dimensional cube. It has 16 corners, 8 on the red cube, 8 on the green cube with corresponding corners connected. But as we rotate it in tree space we see that one three dimensional face is still quite flat. We rotate again in four dimensional space this time leading to truly general positions. At almost any instant the four edges that come out at one of the corners have no three lines lying on a plane. Stopping our four dimensional rotation, we show a three dimensional spin around an axis where we see the red cube and the green cube interlaced. At the end of the four dimensional rotation we fold all the way back, come back to three space, continue back to the plane and end at the square.
Viewing objects in three dimensional space we are aided by the devices of perspective. As we rotate a tree cube in perspective we see each of the six bounding squares as the smallest farthest away square and then again as the largest closest square. This is not the top view of some two dimensional creature swimming in on itself, it's a rotating three dimensional cube and we are quite used to these perspective

distortions. But now we go to four space. We change our perspective and we proceed to walk around that four dimensional cube. As we walk around we see each of the eight cubical faces as the smallest cube when it's furthest away or the closest cube when it's largest. This is not a three dimensional creature swimming through itself, it's the shadows of a rotating four dimensional cube. This is the best rotation with the red cube now largest, now flattened out; now turned inside out as the smallest furthest away cube. And if we become comfortable with rotations every once in a while we see a rotation which confuses us once more. Rotating directly toward us and away from us we find another very strange view of the rotating four dimensional cube in perspective. At the end we go back and end at the three dimensional cube.
In addition to projections and rotations we can use de device of slicing. Slicing a square by an edge parallel to one side gives us a segment for a while. Corner first gives us a segment which grows and come back off ending at a corner. We can use the same technique to slice a three dimensional cube. Parallel to one face we get a square for a while. Edge first we get rectangles which grow and come back off ending at an edge. Most interesting is corner first. What do we get half way through. We can see that a bit more slowly. Triangles which become cut off so that half way trough we cut each of the six bounding squares in precisely the same way. We obtain a perfect regular hexagon half way through the cube.
We can use the same technique to slice a four dimensional cube. We position a three dimensional knife parallel to one face to get a cube for a while. Square first our slices are square prisms that come back off ending in a square. There are two more symmetrical ways of slicing a four dimensional cube. Edge first gives us triangular prisms. Half way through a hexagonal prism coming all the way back off ending at an edge. Most interesting, most challenging what do we get when slices comes trough corner first, along the long diagonal. We can see that more slowly. A small tetrahedral pyramid which grows until it hits the vertices and becomes truncated, cut off so that three-eighths off the way through, we have four equilateral triangles, four regular hexagons. One hexagon exactly half way through that red cube. This is a semi-regular polyhedron already known to Archimedes. Half way trough we cut each of the eight bounding three dimensional cubes in precisely the same way. We get eight equilateral triangles fitting together to form a perfect regular octahedron, a platonic solid. We complete our tour of the four dimensional cube by showing slices which go off at a point not situated at the center of screen. One last pass. Tetrahedron, tetrahedron cut off; in the middle the octahedron. Tetrahedron cut off the other way, coming back off ending at a point. Completing our tour of the four dimensional cube.

Traducció al català:
"HIPERCUB: PROJECCIONS I SECCIONS"

Comencem amb un quadrat, que és la vista frontal d'un cub, el qual comença a girar. La nostra primera impressió d'un cub tridimensional rotant és d'uns quadrats lliscant uns sobre els altres. La il·lusió de la porta giratòria. Si girem el cub tridimensionalment al voltant d'un altre eix obtenim paral·lelograms i rectangles, imatges que fàcilment interpretem com les ombres d'un cub tridimensional que gira. Però ara el fem girar en l'espai de quatre dimensions. La nostra primera impressió d'un cub quadridimensional girant és d'uns cubs tridimensionals lliscant uns dins els altres. La il·lusió de la porta giratòria en una dimensió superior. Si aturem la rotació quadridimensional i el fem girar al voltant d'un eix de l'espai tridimensional obtenim quelcom semblant a un model metàl·lic que ens recorda una caixa rectangular. Però ara girem en un pla diferent en l'espai quadridimensional. Aquesta és la primera bona visió d'un cub de quatre dimensions. Té setze vèrtexs, 8 al cub verd, 8 al cub vermell amb els corresponents vèrtexs connectats. Però a mesura que el fem girar en l'espai tridimensional observem que una cara tridimensional encara és plana. El girem altre cop a l'espai quadridimensional i aquesta vegada ens condueix a posicions veritablement generals. A gairebé qualsevol instant, d'entre les 4 arestes que sorgeixen d'un dels vèrtexs no n'hi ha 3 que estiguin situades en un mateix pla. Aturant la rotació quadridimensional, observem un spin tridimensional al voltant d'un eix on podem veure el cub vermell i el cub verd entrellaçats. Al final de la rotació quadridimensional desfem tot el camí, tornem a l'espai de tres dimensions, seguim enrere fins el pla i acabem amb el quadrat.
En la visualització d'objectes tridimensionals estem ajudats pel fenomen de la perspectiva. A mesura que girem un cub de tres dimensions en perspectiva veiem cada una de les sis cares que limiten el cub com el quadrat més petit i més allunyat i posteriorment com aquest esdevé la cara més gran i més a prop de nosaltres. No estem davant una criatura bidimensional nedant dins ella mateixa sinó que es tracta d'un cub tridimensional girant, i nosaltres estem acostumats a aquests tipus de distorsions causades per la perspectiva. Però ara ens traslladem a l'espai de quatre dimensions. Canviem la nostra perspectiva i ens disposem a moure'ns al voltant d'aquest cub de quatre dimensions. A mesura que girem al seu voltant observem cada una de les seves vuit cares cúbiques com la més petita quan està més allunyada i com la

més gran quan la tenim a prop. No es tracta d'una criatura tridimensional nedant dins ella mateixa, és l'ombra d'un cub quadridimensional rotant. Aquesta és la millor rotació, amb el cub vermell com el més gran, tot seguit aplanant-se i acabant a l'interior com el cub més petit i allunyat de nosaltres. I si ens sentim còmodes amb aquestes rotacions podem observar-ne una altra que ens confon una mica més. Girant directament cap a nosaltres i en direcció contrària a nosaltres trobem una altra vista força estranya d'un hipercub en perspectiva rotant a l'espai de quatre dimensions. Finalment tornem enrere i acabem amb el cub de tres dimensions.
A més de les projeccions i les rotacions podem utilitzar la tècnica de la intersecció. Tallant un quadrat mitjançant una línia paral·lela a un dels seus costats obtenim un segment durant uns instants. Començant per un vèrtex aconseguim un segment el qual creix i retrocedeix acabant al vèrtex oposat. Podem utilitzar la mateixa tècnica per tallar un cub tridimensional. Paral·lelament a una cara obtenim un quadrat durant uns instants. Començant per una aresta obtenim rectangles que creixen i retrocedeixen acabant a una aresta. És més interessant quan comencem per un vèrtex. El que obtenim a mig camí. Ho podem veure més a poc a poc. Triangles que esdevenen truncats de tal manera que a mig camí tallen cada un dels sis quadrats de cub de manera idèntica. Obtenim un hexàgon perfectament regular a mig camí del cub.
Podem utilitzar la mateixa tècnica per tallar un cub de quatre dimensions. Disposem un ganivet tridimensional paral·lel a una de les cares per obtenir un cub durant uns instants. Començant per un quadrat les seccions que obtenim són prismes quadrats que creixen, retrocedeixen i acaben a un altre quadrat. Hi ha dues maneres més de tallar un cub quadridimensional simètricament. Començant amb una aresta obtenim prismes triangulars. A mig camí un prisma hexagonal, el qual retrocedeix i acaba en una aresta. Més interessant i més desafiant és el que aconseguim quan les seccions parteixen d'un vèrtex i es desplacen a través de la diagonal gran del cub quadridimensional. Ho podem veure més lentament. Una piràmide tetraèdrica, la qual creix fins que toca els vèrtexs i es trunca, de manera que a tres vuitens del camí obtenim quatre triangles equilàters i quatre hexàgons regulars. Un hexàgon exactament a meitat de camí del cub vermell. Aquest és un poliedre semiregular ja conegut per Arquímedes. A mig camí tallem cada un dels vuit cubs de l'hipercub de manera exactament igual. Obtenim vuit triangles equilàters encaixant junts formant un octaedre perfectament regular, un sòlid platònic. Completem el nostre viatge pel cub de quatre dimensions mostrant com les seccions retrocedeixen cap a un punt no situat al centre de la pantalla. Una última passada. Tetraedre, tetraedre truncat; a mig camí: l'octaedre. Tetraedre truncat a l'inrevés retrocedint i acabant en un punt. Completant el nostre viatge pel cub de quatre dimensions.

A-1.3. Descripció de les parts i del contingut

El documental del que tracta el present annex es divideix en diferents parts. A continuació en fem un resum esquemàtic amb l'objectiu de facilitar la seva comprensió en el moment de visualitzar-lo.

→ 1. Introducció (fins 3' 29''): presentació del cub i del seu anàleg a la quarta dimensió (hipercub). Comparació del cas tridimensional amb el de quatre dimensions.

→ 2. Estudi de les projeccions (fins 5' 40''): estudi de la rotació tridimensional del cub. Comparació d'aquesta amb la de l'hipercub en l'espai de 4 dimensions.

→ 3. Estudi de les seccions (fins el final): Estudi de les diferents maneres com es pot seccionar un cub 3D així com de les seccions bidimensionals que s'obtenen. Estudi de les maneres com es pot seccionar un hipercub 4D i de les seccions 3D que s'obtenen.

A-2.1. Utilització d'applets en l'estudi de figures 4D

Durant tot el treball hem utilitzat fotografies i representacions gràfiques de figures tridimensionals per complementar les explicacions. En aquest annex presentem una sèrie d'applets que permeten generar a la pantalla de l'ordinador diferents figures amb textura tridimensional relacionades amb els temes tractats en aquest treball. Una de les principals característiques d'aquests petits programes és que ens permeten moure a voluntat les figures generades la qual cosa ens facilita l'estudi de la seva geometria.
A continuació fem una breu descripció dels applets que es podem trobar al disc del treball i expliquem el funcionament bàsic d'aquests. Tots ells han estat creats per Mark Newbold, qui molt amablement ens els ha cedit especialment per aquest treball.

Nota: Per a poder-los visualitzar és necessari tenir instal·lada la màquina virtual Java 1.1 així com Internet Explorer.

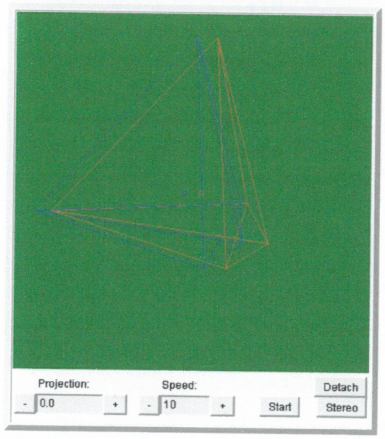
A-2.2. Descripció dels applets i del seu funcionament

A-2.2.1. STEREOSCOPIC ANIMATED SIMPLEX, HYPERCUBE, 16-CELL I 24-CELL

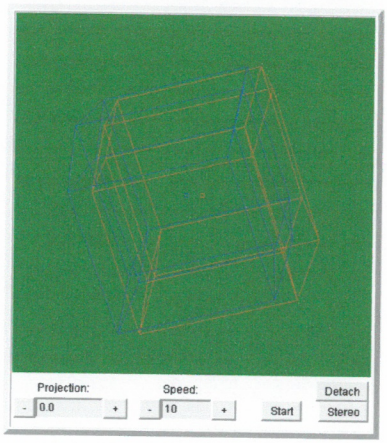
En aquest apartat ens referirem a 4 applets, que són:

>A-2.1. Stereoscopic Animated Simplex
>A-2.2. Stereoscopic Animated Hypercube
>A-2.3. Stereoscopic Animated Cross-Polytope
>A-2.4. Stereoscopic Animated 24-cell

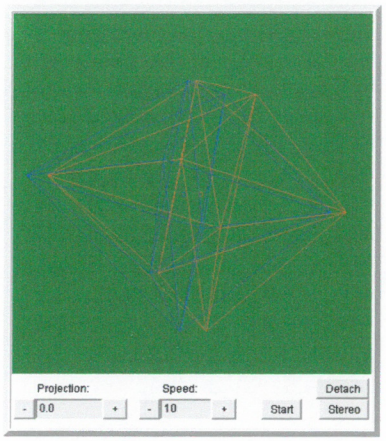
Ens referirem a ells conjuntament perquè tots comparteixen els mateixos comandaments i presenten el mateix aspecte. Per a visualitzar-los correctament és necessari utilitzar les ulleres blaves i vermelles que proporcionem amb el treball. D'aquesta manera s'aconsegueix que les figures prenguin un efecte tridimensional.
Mitjançant aquests applets podrem observar les arestes de diferents figures 4D. En primer lloc podem veure el 4-simplex, seguidament l'hipercub, a continuació el 16-cèl·lula (anomenat també cross-polytope) i finalment podem observar les arestes del 24-cèl·lula.



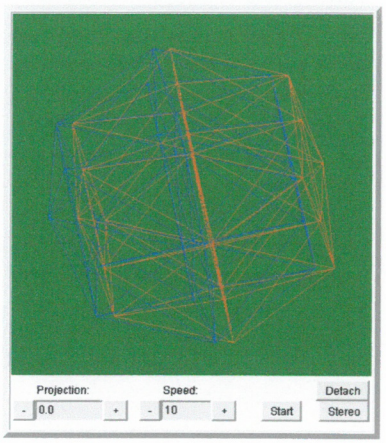
Stereoscopic Animated Simplex



Stereoscopic Animated Hypercube



Stereoscopic Animated 16-cell



Stereoscopic Animated 24-cell

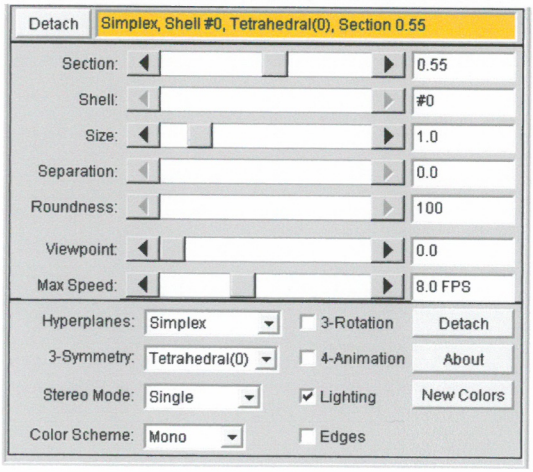
Comandaments:

- *Projection*: canvia la perspectiva de la projecció. El seu valor oscil·la entre 0 i 0.95. Modificant aquest paràmetre podem estudiar com es veuria l'hipercub situant-nos més o menys lluny a l'espai de quatre dimensions.
- *Speed:* mitjançant aquest comandament podem augmentar o disminuir la velocitat d'oscil·lació de la figura.
- *Start/stop:* inicia o atura el moviment de la figura.
- *Detach:* amb aquest botó podem fer que l'applet es traslladi a una pantalla nova.
- *Stereo:* prement-lo successivament ens permet canviar el color de la figura i el fons de l'applet perquè es pugui veure amb altres tipus d'ulleres.

A-2.2.2. HYPERSPACE POLYTOPE SLICER

>A-2.5. Hyperspace Polytope Slicer

Un altre applet que també hem cregut interessant incloure en aquest annex és el *"Hyperspace Polytope Slicer"*. A diferència dels anteriors, en els quals es mostrava la projecció tridimensional d'una figura de 4 dimensions, mitjançant aquest programa podrem estudiar les seccions tridimensionals que s'obtenen en tallar determinats politops. En concret es poden estudiar les seccions del 600-cèl·lula, el 120-cèl·lula, el 24-cèl·lula, el 16-cèl·lula, l'hipercub i el 4-simplex.



La imatge generada apareix en un requadre sobre els comandaments. Procedim a estudiar superficialment les funcions d'aquests.
En primer lloc trobem una barra horitzontal corresponent a la "*Section*". Mitjançant aquesta podem triar per a quin punt volem seccionar la figura 4D estudiada. Movent-la un primer cop fins

a l'extrem esquerre observarem com al requadre de la dreta hi apareix 0.0. En aquest instant estarem tallant la figura just per la meitat. Retornant la barra a la dreta, observarem les seccions de la segona meitat del politop.
Observem com la segona opció retolada amb el mot "*Shell*" està desactivada en un principi. A continuació hi trobem la barra desplaçadora corresponent a "*Size*". Fent ús d'aquesta controlarem la mida de la figura i, per tant, també de la secció. La tercera barra correspon al valor "*Separation*" i només és activada quan visualitzem les figures en mode estereogràfic. En aquest cas no serà necessari variar el valor. La quarta barra ("*Roundness*") i la cinquena ("*Viewpoint*") canvien característiques de les seccions però és preferible no modificar els valors predeterminats. L'última barra, retolada amb "*Max. Speed*" controla la velocitat de rotació automàtica 3D i 4D quan aquestes estan activades.
Procedim a estudiar la segona part del panell de control. El primer menú desplegable corresponent a "*Hyperplanes*" ens permet escollir quina figura volem seccionar. En el menú apareix cada politop diverses vegades, algunes d'elles amb uns valors entre parèntesis a la dreta. Recomanem escollir aquells que no tinguin aquest parèntesis. Just a sota trobem un altre desplegable etiquetat amb el nom "*3-Symmetry*". Aquest ens permetrà escollir per quina de les figures que integren el politop volem iniciar la secció. A continuació trobem una altra opció a escollir anomenada "*Stereo Mode*". Aquesta ens permet triar la manera com volem veure les seccions. Recomanem escollir *Single* si es volen veure les seccions acolorides normalment o bé *Anagliyph* per ser vistes mitjançant les ulleres i aconseguir un efecte 3D. L'últim menú correspon a "*Color Scheme*" i varia segons l'opció escollida al menú anterior. Si hem decidit veure les seccions en mode *Single* recomanem triar l'opció *By Chunck* i en cas que es vulguin veure amb mode *Anagliyph* serà preferible activar l'opció *Red-Blue-Black*.
Un cop descrits els menús desplegables farem referència a les caselles activables de la dreta. La primera, "*3-Rotation*" ens activa la rotació automàtica tridimensional. La segona, "*4-Rotation*", fa que la secció avanci automàticament a velocitat constant. La tercera opció ("*Lighting*") activa o desactiva les ombres de les seccions i la última ("*Edges*") fa visibles o no les arestes. Per últim, el botó "*Detach*", ens possibilitarà traslladar l'applet a una altra pantalla.

Hem cregut interessant fer menció d'aquests applets en un annex del treball perquè han esdevingut de gran ajuda a l'hora d'elaborar les explicacions de determinats apartats i poden aclarir processos ja tractats en vídeos i seqüències anteriors.

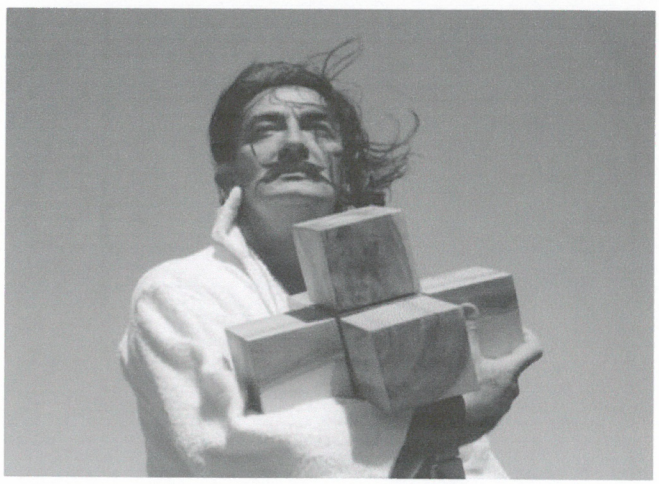
Durant tot el treball hem tractat el tema de la quarta dimensió d'una manera seriosa i estrictament matemàtica. No obstant, aquest tema resulta ser molt més pròxim a nosaltres del que pensem. Cine, televisió, art... Pràcticament a tot arreu podem trobar petites referències a aquesta dimensió, per molts "desconeguda". En aquest apartat del treball farem un breu esment d'aquests casos.

A-3.1. Art, arquitectura i dimensions superiors

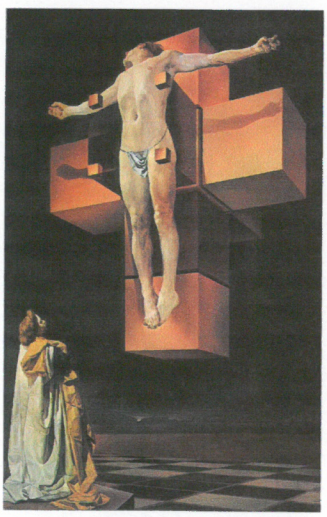
Com ja hem explicat a la breu ressenya històrica feta a l'apartat introductori del treball, el tema de la quarta dimensió ha estat font d'inspiració per un gran nombre d'artistes. Un exemple d'això el trobem amb el corrent cubista. Deixant de banda les influències que aquest tema hagi pogut tenir en les diferents tendències artístiques; hi ha alguns pintors, escultors i arquitectes que s'han basat en figures de dimensions superiors per crear determinades obres. Procedim a fer un repàs d'alguns d'ells:

• *Salvador Dalí (1904-1989)*

L'artista empordanès, gran afeccionat a la ciència, va mostrar un gran interès pel tema de les dimensions superiors. Del 1954 data un dels seus quadres més representatius, titulat *Corpus Hipercubus*. En ell podem veure Crist crucificat en un model d'hipercub desplegat. Per a l'autor, aquesta obra significà la consecució d'un dels seus objectius: poder unir art, religió i ciència en una sola obra. El 1975, durant una estada a Nova York, Dalí es va trobar amb el professor Thomas Banchoff, amb qui va estar parlant de les dimensions superiors i van discutir sobre alguns efectes artístics de la perspectiva en espais de més de tres dimensions. La internacionalitat del pintor ha fet que aquest quadre hagi aparegut en un gran nombre de publicacions que tracten aquesta temàtica.



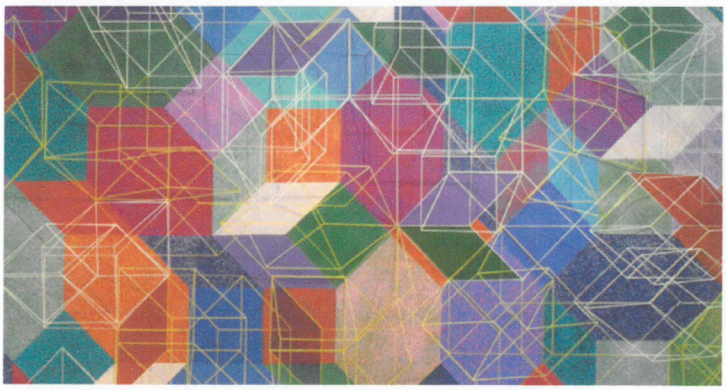
Dalí agafant un model d'hipercub desplegat. Per ell, tant Déu com l'hipercub pertanyien a dimensions superiors.



Corpus Hipercubus (1954)

- ***Tony Robbin***

Tony Robin és un dels artistes actuals amb més projecció internacional, les obres del qual es basen íntegrament en figures de més de 3 dimensions. En la creació d'aquestes utilitza la pintura com a base, combinada amb estructures amb relleu que creen un efecte visual canviant depenent de la posició de l'observador. La figura predominant en la seva obra és l'hipercub, tal com podem veure en les imatges següents:

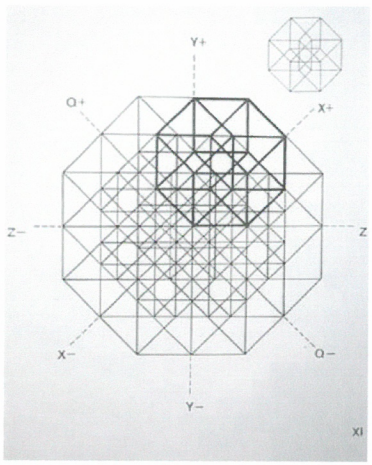


Fourfield (1980-19881)

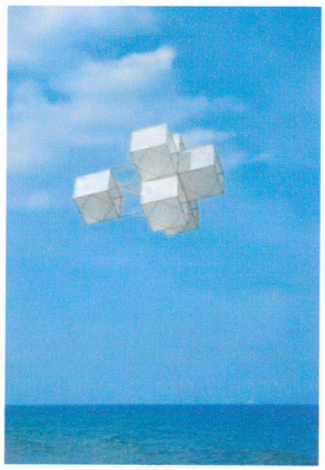
Sense títol (1996-1998)

COAST (1994)

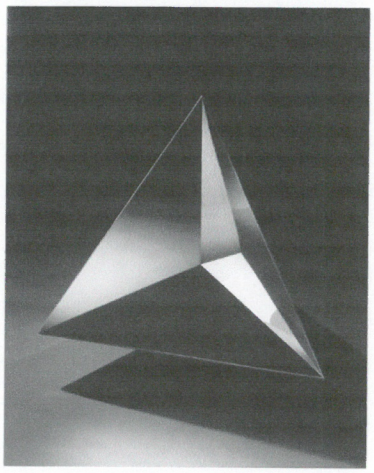
A més d'aquests podem trobar molts altres artistes, l'obra dels quals en algun moment s'ha inspirat en la quarta dimensió. José Yturralde, Attilio Pierelli, Otto von Spreckelsen, Max Bill... en són altres exemples.



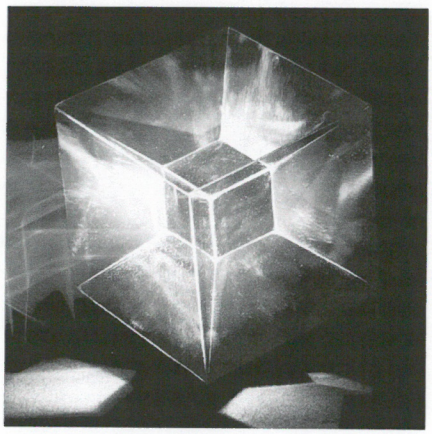
Estudio de hiperpoliedro
(1975-1976) José Yturralde



Hipercubo
(1977) José Yturralde

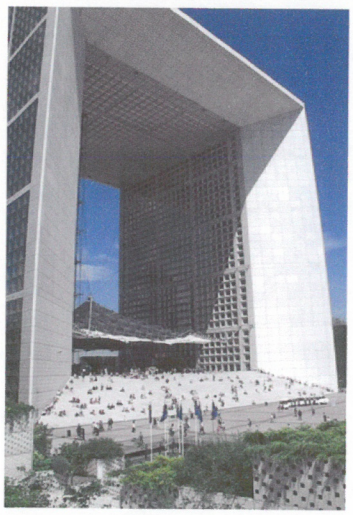


Pentacell
Attilio Pierelli



Ipercubo 1
(1970) Attilio Pierelli

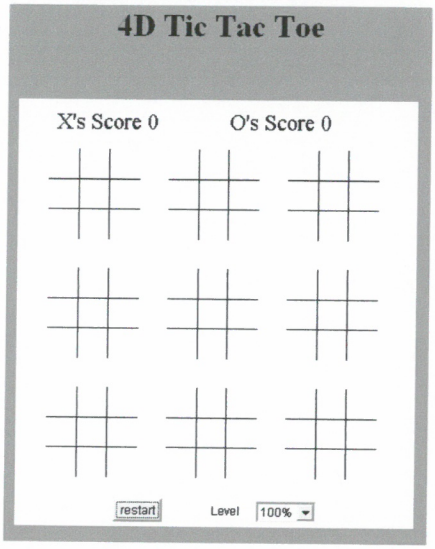
Arc de Defense
(1982) Otto von Spreckelsen



Arc de Defense
(1982) Otto von Spreckelsen

A-3.2. Jocs, ciència ficció i dimensions superiors

La quarta dimensió, a més de ser un tema interessant d'estudiar des d'un punt de vista estrictament matemàtic, també resulta ésser molt atractiu en el moment en que es comença a especular sobre com serien els anàlegs, a dimensions superiors, dels objectes i les coses més quotidianes.

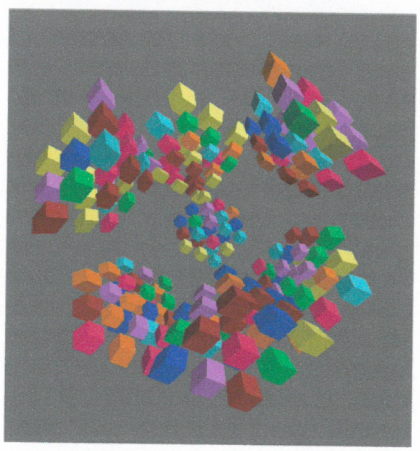


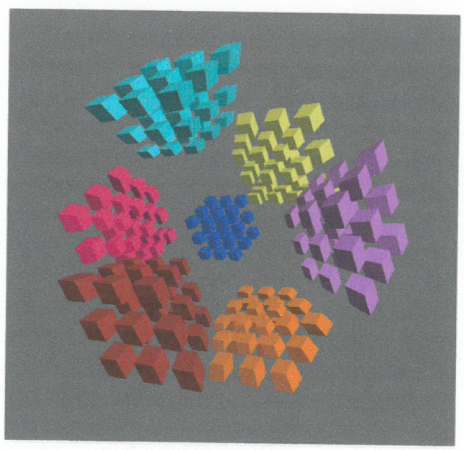
Com seria, per exemple, un tres en ratlla de quatre dimensions? La captura de l'esquerra s'ha extret de la pàgina web indicada, on s'hi pot trobar un exemple interactiu d'un tres en ratlla 4D.

http://www.geocities.com/ResearchTriangle/System/3517/tictac4d/tictac4d.html

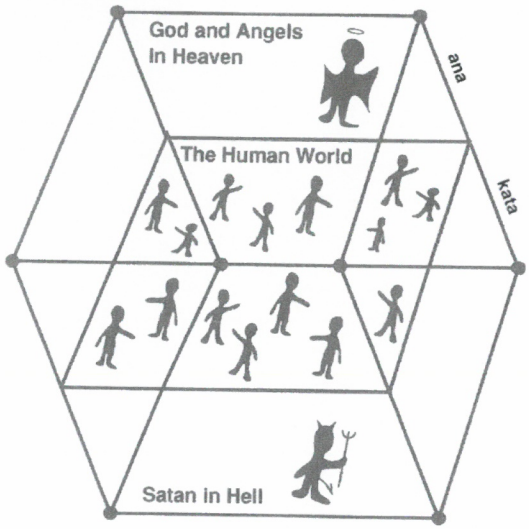
Un altre joc que ha esdevingut molt popular és el cub de Rubik. Aquest giny, inventat pel professor hongarès Ernö Rubik el 1980, té com a objectiu recompondre el trencaclosques de manera que cada cara sigui d'un únic color. Com és d'esperar també existeix el seu anàleg de 4 dimensions. La versió interactiva del joc es pot trobar al disc del treball i a continuació presentem algunes captures. L'objectiu d'aquest segueix sent idèntic al del cub de Rubik original: fer que cada cara sigui d'un únic color. El repte, però, esdevé certament molt més complex. Segons els seus creadors l'hipercub de Rubik es pot trobar en 1.756.772.880.709.135.843.168.526.079.081.025.059.614.484.630.149.557.651.477.156.0 21.733.236.798.970.168.550.600.274.887.650.082.354.207.129.600.000.000.000.000 estats diferents.

>A-3.1. Cub de Rubik 4D





Deixant de banda els jocs, com ja hem dit el tema de la quarta dimensió desperta un interès i una curiositat notable. Aquest és el motiu pel qual hi ha un gran nombre de conjectures sense rigor científic que especulen sobre possibles usos de la quarta dimensió. Religió, misticisme, ciència ficció... La possibilitat de que existeixi una nova "direcció" que encara no hem pogut explorar és una ocasió perfecta per justificar (o si més no, no descartar) coses que a dia d'avui la ciència encara no és capaç d'aclarir com serien els viatges interestel·lars, la telepatia, el cel i l'infern o fins i tot l'existència de Déu.
Tots aquests assumptes, completament allunyats de l'objectiu perseguit per aquest treball, els hem volgut incloure en aquest annex a tall de curiositat.



A-4.1. Càlcul del nombre de r-cares d'un n-simplex

A-4.1.1. OBTENCIÓ DE LA FÓRMULA GENERAL

Quan fèiem l'estudi de l'hipercub hem pogut desenvolupar una fórmula amb la qual hem pogut calcular el nombre de r-cares que tindria un n-cub de qualsevol dimensió (entera i positiva).
Tal com ja hem vist, l'anàleg del tetraedre en 4 dimensions és el 4-simplex. No obstant, en espais de més de 4 dimensions (diguem-ne de "n" dimensions) podrem construir també un simplex de n dimensions. A aquest simplex l'anomenarem n-simplex. Per aquesta figura també serà possible crear una fórmula que directament ens permeti calcular el nombre de r-cares (cares de "r" dimensions) de les que estarà format. Procedim doncs a deduir-la. Com que aquest procés presenta notòries similituds amb el del n-cub, a algunes de les seves parts només ens hi referirem per sobre.
Val a dir que col·loquem aquesta fórmula en un annex simplement per una qüestió d'extensió. Hem cregut convenient no perllongar més el cos del treball i és per això que la presentem aquí.

Comencem fent un quadre en el que podem trobar el nombre de figures de diferents dimensions que integren un triangle, un tetraedre i un 4-simplex:

figura	núm. vèrtexs	núm. arestes	núm. triangles	núm. tetraedres	núm. 4-simplexs
triangle	3	3	1		
tetraedre	4	6	4	1	
4-simplex	5	10	10	5	1

Intentem buscar una fórmula per calcular el nombre de vèrtexs. Observem com un triangle 2D en té 3, un tetraedre 3D en té 4 i un 4-simplex en té 5. En definitiva, que per cada dimensió que augmentem, augmenta una també unitat el nombre de vèrtexs. Així doncs podem escriure:

$$X_0 = n+1$$

Al llarg d'aquesta explicació emprarem la mateixa notació que en el cas del n-cub. Així, aquí X_0 vol dir el nombre de "cares" de 0 dimensions (vèrtexs), X_1 vol dir el nombre de "cares" de 1 dimensió (arestes), X_2 vol dir el nombre de cares de 2 dimensions (triangles), X_3 el nombre de "cares" de 3 dimensions (tetraedres), i així successivament.
Dit això, podem cercar la fórmula per calcular el nombre d'arestes. Si ens imaginem un triangle (2D) veurem com de cada vèrtex en sorgeixen dues arestes. En el cas del tetraedre (3D), de cada vèrtex en surten 3 i si observem la projecció d'un 4-simplex (4D) veurem com n'hi surten 4. Fem una primera conjectura de fórmula:

$$*X_1 = X_0 \cdot n$$

Però aquesta fórmula no és correcta. Cada una de les arestes està limitada per dos vèrtexs, la qual cosa significa que hem comptat cada aresta dues vegades. Corregim i obtenim:

$$X_1 = \frac{X_0 \cdot n}{2}$$

Seguim i ara busquem la fórmula que ens calculi el nombre de cares triangulars bidimensionals. Tenint en compte que en un tetraedre 3D dos triangles intersecten en una mateixa aresta i que en un 4-simplex 4D són 3 els que ho fan a cada una d'elles conjecturem la fórmula següent:

$$*X_2 = X_1 \cdot (n-1)$$

Tornem a errar. Cada cara bidimensional toca a 3 arestes alhora. Per tant hem de dividir la fórmula anterior per 3:

$$X_2 = \frac{X_1 \cdot (n-1)}{3}$$

Si ara ens centrem en el 4-simplex veurem com en cada una de les seves cares planes hi conflueixen 2 tetraedres 3D. Abans de precipitar-nos a fer una primera especulació hem de tenir en compte que cada un dels tetraedres toca amb 4 cares alhora, així doncs, la fórmula obtinguda serà la següent:

$$X_3 = \frac{X_2 \cdot (n-2)}{4}$$

Arribats a aquest punt podem anar substituint successivament les fórmules de manera que totes es trobin només en funció de n. Mostrem el procés a continuació:

- $X_1 = \frac{X_0 \cdot n}{2}$; $X_1 = \frac{(n+1) \cdot n}{2}$

- $X_2 = \frac{X_1 \cdot (n-1)}{3}$; $X_2 = \frac{\frac{(n+1) \cdot n}{2} \cdot (n-1)}{3}$; $X_2 = \frac{(n+1)n(n-1)}{3 \cdot 2}$

- $X_3 = \frac{X_2 \cdot (n-2)}{4}$; $X_3 = \frac{\frac{(n+1)n(n-1)}{3 \cdot 2} \cdot (n-2)}{4}$; $X_3 = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4 \cdot 3 \cdot 2}$

Ara que ja hem fet aquesta substitució podem procedir a fer una generalització de la fórmula que ens serveixi per calcular el nombre de cares de r dimensions d'un cub de n dimensions i que, per tant, simbolitzarem amb X_r (nombre de cares de r dimensions) .
Tenint en compte aquesta notació, fixem-nos primer en el numerador. En ell apareix una sèrie de nombres multiplicats. El primer nombre que veiem sempre és (n+1), i a partir de llavors els nombres van disminuint una unitat fins que arribem a un valor que és (n-(r-1)).

Dit això fem-nos ressò del que passa al denominador. En ell també apareix una successió de nombres multiplicats entre ells. El primer sempre és una unitat més gran que r i els que el segueixen van disminuint una unitat fins arribar a dos. Per tant, podem expressar el denominador fent servir la funció factorial de la manera següent: (n+1)!
Així doncs, les fórmula general serà:

$$X_r = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)...(n-(r-1))}{(r+1)!}$$

$$X_r = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{(r+1)!} \qquad r \leq n$$

Aquesta expressió ens permet calcular el nombre de r-cares que tindrà un simplex de n dimensions. Tanmateix, la sèrie del numerador no es pot computar informàticament, motiu pel qual intentarem expressar-la de manera diferent. Mostrem aquesta modificació a continuació.
Com ja hem dit, al numerador apareixen una successió de nombres multiplicats. El més gran d'ells val (n+1) i a partir d'ell van descendint d'unitat en unitat. Si intentem substituir aquesta sèrie per l'expressió factorial (n+1)! observarem com apareixen un conjunt de nombres multiplicats que no ens interessen i que són (n-r)!. Per no modificar la fórmula original caldrà, doncs, que introduïm aquesta expressió al denominador dividint. Fetes aquestes modificacions, la fórmula que ens quedarà serà:

$$\boxed{X_r = \frac{(n+1)!}{(n-r)!(r+1)!}} \qquad r \leq n$$

A-4.1.2. COMPUTACIÓ DE RESULTATS

Amb la fórmula trobada en l'apartat A-4.1.1. podem calcular amb certa facilitat el nombre de r-cares que té un simplex de n dimensions. La tasca esdevé ràpida i fàcil d'efectuar si ens ajudem d'un full de càlcul amb el formulari adequat com el que es mostra a continuació.

>A-4.1. Taula de les r-cares d'un n-simplex

dimensió del n-simplex	nombre de cares de r dimensions										
	r=0	r=1	r=2	r=3	r=4	r=5	r=6	r=7	r=8	r=9	r=10
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0
4	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0	0
5	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0	0

6	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0	0
7	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0	0
8	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0	0
9	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	0
10	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1

A l'esquerra de la taula hi ha el nombre de dimensions que té el n-simplex estudiat i a les columnes de la seva dreta trobem el nombre de cares de cada dimensió que aquest té. Com és lògic, en un simplex de n dimensions només pot estar format per r-cares, la r de les quals sigui igual o menor a n.

A-4.1.3. RELACIÓ AMB L'EXPANSIÓ D'UN BINOMI

A l'apartat de l'hipercub havíem vist com el càlcul del nombre de r-cares d'un n-cub es podia relacionar amb l'expansió d'un determinat binomi. En el cas del n-simplex passarà quelcom semblant. Per a trobar aquesta relació cal fer referència a una de les fórmules de combinatòria. En concret, el nombre de combinacions que es poden fer amb "a" elements agafats en grups de "b" elements es calcula de la manera següent:

$$ {}_bC_a = \frac{a!}{b!(a-b)!} $$

Si recuperem la formula deduïda al primer subapartat i la comparem amb la de les combinacions observarem certa similitud entre elles.

$$ X_r = \frac{(n+1)!}{(n-r)!(r+1)!} $$

Si volem calcular el nombre de r-cares d'un n-simplex mitjançant combinatòria haurem de fer alguns canvis. En primer lloc sembla ser que "a" s'haurà de substituir per (n+1) i "b" ho haurà de fer per (n-r). Tenint en compte això, si calculem (a-b) veurem com val (r+1), tal com surt a la fórmula que hem desenvolupat. Així doncs, sembla ser que es compleix el següent:

$$ X_r = \frac{(n+1)!}{(n-r)!(r+1)!} = {}_{(n-r)}C_{(n+1)} $$

Posem un exemple. Procedim a calcular quantes cares de cada dimensió tindrà un 4-simplex mitjançant combinatòria:

r=0 $$ {}_{(n-r)}C_{(n+1)} = {}_{(4-0)}C_{(4+1)} = {}_{(4)}C_{(5)} = \frac{5!}{4!(5-4)!} = 5 $$

r=1 $${}_{(n-r)}C_{(n+1)} = {}_{(4-1)}C_{(4+1)} = {}_{(3)}C_{(5)} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$$

r=2 $${}_{(n-r)}C_{(n+1)} = {}_{(4-2)}C_{(4+1)} = {}_{(2)}C_{(5)} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$$

r=3 $${}_{(n-r)}C_{(n+1)} = {}_{(4-3)}C_{(4+1)} = {}_{(1)}C_{(5)} = \frac{5!}{1!(5-1)!} = 5$$

r=4 $${}_{(n-r)}C_{(n+1)} = {}_{(4-4)}C_{(4+1)} = {}_{(0)}C_{(5)} = \frac{5!}{0!(5-0)!} = 1$$

Fixem-nos que per calcular totes les r-cares del 4-simplex hem fet la sèrie de càlculs següent:

$${}_4C_5 = \binom{5}{4} \qquad \binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$${}_3C_5 = \binom{5}{3} \qquad \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$${}_2C_5 = \binom{5}{2} \qquad \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$${}_1C_5 = \binom{5}{1} \qquad \binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$${}_0C_5 = \binom{5}{0} \qquad \binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

A la dreta de les combinacions hi hem situat els nombres combinatoris corresponents. Si ens hi fixem veurem com aquests són els que trobem a la sisena línia del triangle de Pascal (emprada per calcular binomis elevats a exponent 5) a excepció del ${}_5C_5$. Tenint en compte que hem volgut calcular les r-cares d'un 4 simplex i que hem desembocat a la línia del triangle de Pascal que correspon a binomis elevats a 5 proposem el binomi següent:

$$(1+1)^{n+1}$$

Si calculem l'expansió d'aquest binomi per a qualsevol valor enter i positiu de "n" obtindrem el nombre de r-cares de les que està format aquell n-simplex. Procedim a verificar-ho amb alguns exemples:

2-simplex $$(1+1)^{2+1} = (1+1)^3 = 1+3+3+1$$

3-simplex $(1+1)^{3+1} = (1+1)^4 = 1+4+6+4+1$

4-simplex $(1+1)^{4+1} = (1+1)^5 = 1+5+10+10+5+1$

5-simplex $(1+1)^{5+1} = (1+1)^6 = 1+6+15+20+15+6+1$

6-simplex $(1+1)^{6+1} = (1+1)^7 = 1+7+21+35+35+21+7+1$

Efectivament els resultats coincideixen amb els de la taula anterior. Tanmateix observem com sempre apareix un primer valor 1 que cal descartar. Si menyspreem aquest, obtindrem el nombre de vèrtexs (X_0), el nombre d'arestes (X_1), el nombre de cares triangulars (X_2) i així successivament fins arribar al nombre de n-cares (X_n).Per tant:

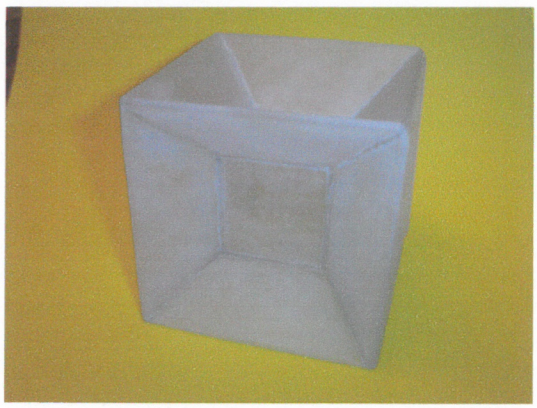
Expandint el binomi $(1+1)^{n+1}$, sent n un nombre enter i positiu, obtindrem el nombre de cares des de 0 fins a n dimensions que té un simplex de n dimensions. Caldrà, però, desestimar el primer valor que obtinguem i que sempre serà 1.

A-5.1. Fabricació de models d'hipercub

L'estudi de la quarta dimensió i de les figures quadridimensionals bàsiques que hem dut a terme en aquest treball s'ha completat amb la fabricació de 3 models d'hipercub que ara presentem en aquest annex.
En concret s'ha fabricat un model de la projecció central de l'hipercub i dos models de l'hipercub desplegat. Procedim a descriure'ls un per un:

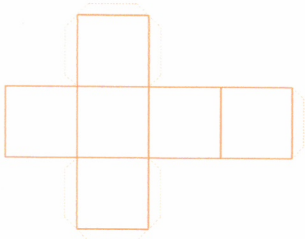
A-5.1.1. MODEL DE PROJECCIÓ CENTRAL DE L'HIPERCUB

Aquest model ha estat fabricat amb polimetacrilat transparent. Està constituït per 12 peces de forma trapezial i 6 peces quadrades. El tallat d'aquestes s'ha dut a terme amb una serra de calar amb fulla per a plàstic dur. Les diferents parts han estat unides amb cola per a plàstics rígids.
Pel que fa al procés de muntatge, en primer lloc es va procedir a construir el cub central petit. Seguidament es van unir 4 peces trapezials per formar un tronc de con de base quadrada. A continuació es va adherir aquest a una de les 6 cares del cub. Es va repetir el procés i el segon tronc de con s'adherí a la cara oposada del cub. Mitjançant les 4 peces trapezials restants es va completar el model. Per últim es procedí a fer un polit a les peces de metacrilat per aconseguir un acabat translúcid.

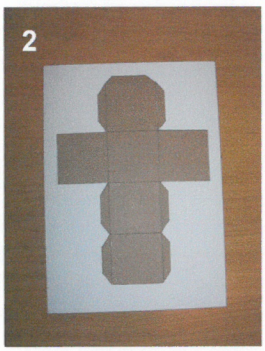


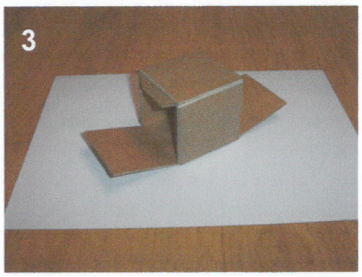
A-5.1.2. MODEL DE L'HIPERCUB DESPLEGAT

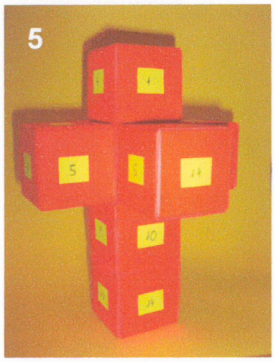
El present model d'hipercub desplegat ha estat fabricat amb cartró de 3 mm de gruix. Per a la unió de les peces s'ha emprat cola d'impacte. Com a eina de tall s'ha utilitzar un cúter i unes tisores.
Per a construir aquest model primer es van haver de fabricar 8 cubs idèntics. Per aquesta finalitat es van tallar 8 peces de cartró com la que es mostra a la figura de la dreta i es van unir les corresponents solapes. Seguidament, fent ús de la cola d'impacte, es varen adherir 4 dels cubs fabricats un sobre l'altre. A continuació, al segon cub d'aquesta torre es van enganxar, a cada una de les seves 4 cares restants, un cub. D'aquesta manera es completava el procés de fabricació de l'estructura del model. Per a fer-lo més estètic, se li aplicà una capa de pintura segelladora blanca i seguidament es repetí el procés amb pintura vermella. Per últim, es col·locaren unes etiquetes numerades a les cares, les quals indiquen com s'hauria de muntar el cub a la



quarta dimensió. Aquelles cares amb el mateix nombre haurien d'unir-se per muntar l'hipercub.

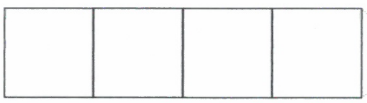




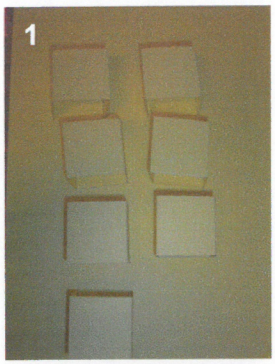


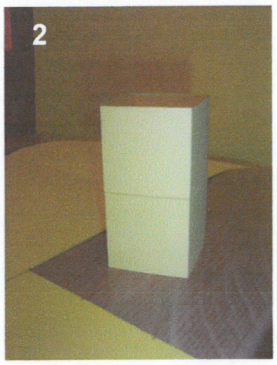
A-5.1.3. SEGON MODEL DE L'HIPERCUB DESPLEGAT

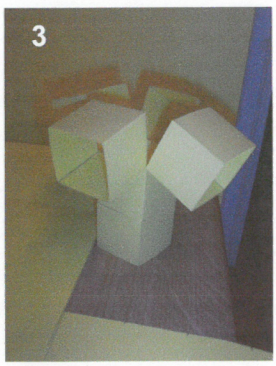
El segon model d'hipercub desplegat que hem fabricat té la característica de poder ser plegat de manera que es pot guardar dins una carpeta, per exemple. Per a la fabricació d'aquest hem emprat cartolina, tisores, cinta adhesiva i cola de barra.

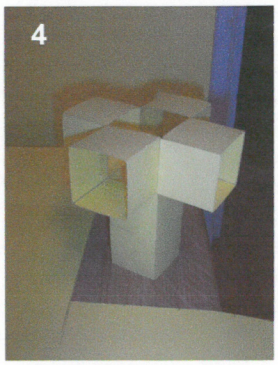


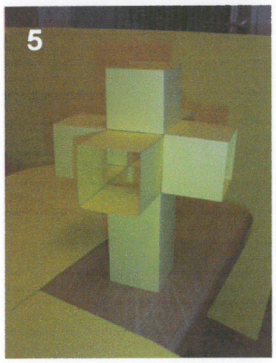
Per fabricar aquest model cal començar tallant 7 peces de cartolina com les que es mostren a la figura de la dreta. Un cop tenim les peces cal doblegar-les per les línies contínues i unir, utilitzant la cola, la solapa dibuixada amb línia intermitent amb l'altre extrem de la peça. Realitzant aquesta operació amb totes elles obtindrem 7 "cubs" sense dues de les seves cares. Fet això cal procedir a unir les diferents parts. El procés que cal seguir per muntar l'hipercub és força complex i per tant l'il·lustrarem fent servir fotografies:

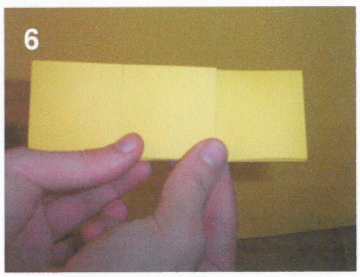

1


2

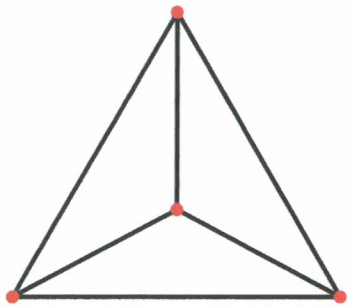

3

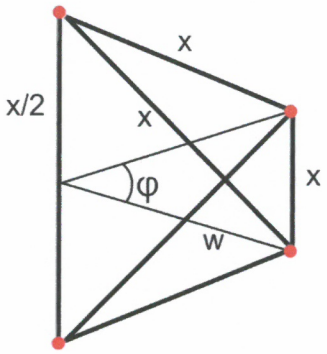

4


5


6

A-6.1. Càlcul de l'angle dièdric format entre dues cares d'un tetraedre

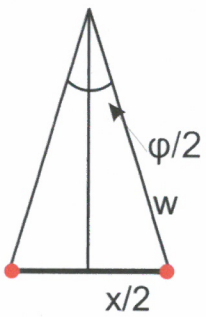




Establertes les variables tal com s'indica a la figura de la dreta podem aplicar el teorema de Pitàgores per obtenir la longitud del costat w de la manera següent:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + w^2 = x^2 \;;\quad w^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} \;;\quad w^2 = \frac{4x^2 - x^2}{4} \;;\quad w = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} \;;\quad w = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Ara que ja sabem la longitud del costat w, podem plantejar el teorema de Pitàgores novament per aconseguir el valor de l'angle φ:



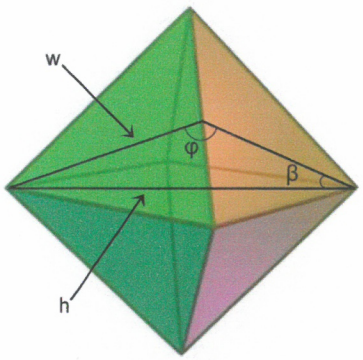
$$\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{x/2}{x\sqrt{3}/2} \;;\quad \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{x}{x\sqrt{3}} \;;\quad \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

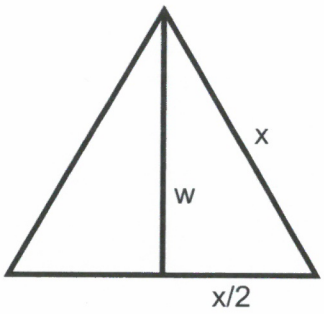
$$\frac{\varphi}{2} = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \;;\quad \varphi = 2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\varphi \simeq 70{,}528779^\circ \simeq 70^\circ 31' 43{,}61''$$

Així doncs, l'angle dièdric que formen dues cares d'un tetraedre val aproximadament **70º 31' 43,61''**.

A-6.2. Càlcul de l'angle dièdric format entre dues cares d'un octaedre

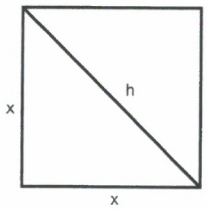




Per calcular l'angle dièdric φ format entre dues cares triangulars de l'octaedre cal que primer calculem el valor de w i h.
Tenint en compte que l'octaedre té costat x, primer començarem deduint quina longitud tindrà el segment w. Aplicant el teorema de Pitàgores aconseguirem:

$$w^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=x^2 \;;\quad w^2+\frac{x^2}{4}=x^2 \;;\quad w^2=x^2-\frac{x^2}{4} \;;\quad w^2=x^2-\frac{x^2}{4} \;;\quad w=\sqrt{\frac{3x^2}{4}} \;;\quad \boxed{w=\frac{x\sqrt{3}}{2}}$$

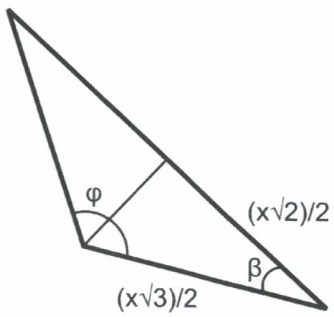
Disposem-nos ara a calcular la longitud del segment h. Aplicarem el teorema de Pitàgores i obtindrem:



$$x^2+x^2=h^2 \;;\quad h=\sqrt{2x^2} \;;\quad \boxed{h=x\sqrt{2}}$$

Ara que ja tenim les longituds dels segments h i w intentem descobrir el valor de l'angle φ mitjançant trigonometria:

$$\cos\beta=\frac{\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)} \;;\quad \cos\beta=\sqrt{\frac{2}{3}} \;;\quad \beta=\arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$



$$\varphi=180-2\arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \;;\quad \varphi\simeq 109,471221^\circ\simeq 109^\circ 28'16''$$

Per tant, l'angle dièdric format entre dues cares triangulars de l'octaedre val **109º 28' 16''**.